



Les deux quantifications de la théorie financière. Contribution à une histoire critique des modèles financiers

Christian Walter

► To cite this version:

Christian Walter. Les deux quantifications de la théorie financière. Contribution à une histoire critique des modèles financiers. 2015. halshs-01118147

HAL Id: halshs-01118147

<https://shs.hal.science/halshs-01118147>

Preprint submitted on 19 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives| 4.0
International License

Les deux quantifications de la théorie financière. Contribution à une histoire critique des modèles financiers

Christian Walter

N°89 | février 2015

Nous proposons d'analyser les changements de la théorie financière sur longue durée à partir de la notion de première puis de seconde quantification de cette théorie. Nous introduisons la notion de quantification puis nous présentons les deux quantifications en les situant l'une par rapport à l'autre au moyen d'un cadre stylisé d'un marché élémentaire à l'équilibre. Nous donnons ensuite un exemple de ces transformations en analysant la manière dont les deux quantifications ont modifié une technique rudimentaire de la finance traditionnelle, le calcul de la valeur actuelle.

Working Papers Series

Les deux quantifications de la théorie financière. Contribution à une histoire critique des modèles financiers

Christian Walter

Février 2015

L'auteur

Christian Walter est actuaire agrégé de l'Institut des actuaires et titulaire de la chaire « Ethique et Finance » du Collège d'études mondiales de la Fondation Maison des sciences de l'homme. Professeur associé à l'université d'Evry (1999-2002), professeur associé à Sciences Po (2002-2008), professeur invité à l'université de Columbia, New York (2008), professeur associé à l'IAE de Paris (2011-2014). Membre du Centre de philosophie contemporaine (PhiCo) de l'université Paris 1-Panthéon Sorbonne. Membre titulaire du Comité consultatif de la législation et de la réglementation financières (CCLRF) de la Direction générale du Trésor. Ses travaux portent sur la modélisation financière, sur l'histoire et l'épistémologie de la théorie de la finance et sur l'éthique de la finance. Derniers ouvrages parus : *Le modèle de marche au hasard en finance*, Paris, Economica, 2013 ; *Extreme Financial Risks and Asset Allocation* (avec Olivier Le Courtois), Londres, Imperial College Press, 2014.

Le texte

Ce texte s'inscrit dans les travaux de la chaire « Ethique et finance » du collège d'études mondiales de la fondation Maison des sciences de l'homme. Je remercie la FMSH pour son soutien ainsi que les membres du collège. Ce texte trouve son origine dans la réflexion engagée au groupe SMA sur les impacts professionnels de la directive « Solvabilité II » pour les compagnies d'assurance, qui se caractérise par une modification significative des pratiques assurantielles. Je remercie le groupe SMA et son directeur général délégué Hubert Rodarie pour l'environnement stimulant qui a permis de bien saisir les enjeux de l'historicisation des techniques de financiarisation dans la compréhension de ces changements. Ce travail a été présenté sous des formes antérieures au séminaire Étudier la financiarisation au travers des dispositifs politiques et des outils de gestion d'Eve Chiapello à l'EHESS (2013) et au séminaire de la chaire « Ethique et finance » (2014). Je remercie les participants à ces deux séminaires pour leurs questions et commentaires. Je remercie vivement Eve Chiapello pour les fécondes conversations que nous avons eues sur la notion de quantification et qui a revu une première version de ce texte.

Citer ce document

Christian Walter, *Les deux quantifications de la théorie financière. Contribution à une histoire critique des modèles financiers*, FMSH-WP-2015-89, février 2015.

© Fondation Maison des sciences de l'homme - 2015

Informations et soumission des textes :

wpfmsh@msh-paris.fr

Fondation Maison des sciences de l'homme
190-196 avenue de France
75013 Paris - France

<http://www.fmsh.fr>

<http://halshs.archives-ouvertes.fr/FMSH-WP>

<http://wpfmsh.hypotheses.org>

Les Working Papers et les Position Papers de la Fondation Maison des sciences de l'homme ont pour objectif la diffusion ouverte des travaux en train de se faire dans le cadre des diverses activités scientifiques de la Fondation : Le Collège d'études mondiales, Bourses Fernand Braudel-IFER, Programmes scientifiques, hébergement à la Maison Suger, Séminaires et Centres associés, Directeurs d'études associés...

Les opinions exprimées dans cet article n'engagent que leur auteur et ne reflètent pas nécessairement les positions institutionnelles de la Fondation MSH.

The Working Papers and Position Papers of the FMSH are produced in the course of the scientific activities of the FMSH: the chairs of the Institute for Global Studies, Fernand Braudel-IFER grants, the Foundation's scientific programmes, or the scholars hosted at the Maison Suger or as associate research directors. Working Papers may also be produced in partnership with affiliated institutions.

The views expressed in this paper are the author's own and do not necessarily reflect institutional positions from the Foundation MSH.

Résumé

Nous proposons d'analyser les changements de la théorie financière sur longue durée à partir de la notion de première puis de seconde quantification de cette théorie. Nous introduisons la notion de quantification puis nous présentons les deux quantifications en les situant l'une par rapport à l'autre au moyen d'un cadre stylisé d'un marché élémentaire à l'équilibre. Nous donnons ensuite un exemple de ces transformations en analysant la manière dont les deux quantifications ont modifié une technique rudimentaire de la finance traditionnelle, le calcul de la valeur actuelle.

Mots-clefs

histoire de la pensée financière, modélisation financière, quantification, convention, finance mathématique, probabilité risque neutre

The two quantifications of the financial theory. A contribution to the critical history of financial modelling

Abstract

I describe the changes of the financial theory over the long run by using the sociological notion of quantification and by coining a new terminology and framework: the first and second quantifications of this theory. I present an overview of the two quantifications by mirroring them with a stylized elementary market moving towards equilibrium. Then I illustrate the shift resulting from this transformation by describing the way the two quantifications impacted a well-known technique of the traditional finance, the calculation of the present value by discounting future cash flows.

Keywords

history of financial thought, financial modelling, quantification, convention, mathematical finance, risk neutral probability

JEL classification

B2, B4, C52 G2, N2, N8

Sommaire

La quantification du risque financier	6
La mise en place de la quantification du risque financier	6
Un exemple élémentaire	7
Les deux quantifications de la théorie financière	8
La première quantification : les années 1960-1970	9
Le programme de Markowitz	9
La surprise du bêta	9
Le fonctionnement de la première quantification	13
La seconde quantification de Harrison-Kreps-Pliska	17
La surprise de la probabilité duale	17
Le fonctionnement de la seconde quantification	18
Correspondance entre les deux quantifications	20
La valeur actuelle d'une quantification à l'autre	20
La valeur actuelle avant la première quantification	20
La valeur actuelle dans la première quantification	21
La valeur actuelle dans la seconde quantification	21
La valeur actuelle dans la longue durée de la quantification	24
Conclusion	24
Références bibliographiques	26

La financiarisation de l'économie est devenue un thème important des recherches actuelles en sciences sociales. Ainsi que l'ont montré de nombreux travaux ces dernières années, le rôle des instruments semble déterminant dans ce processus de financiarisation (Chiapello, à paraître ; Walter, 2011). Les outils de gestion, loin d'être des serviteurs fidèles de décisions politiques ou économiques, apparaissent bien davantage comme des transmetteurs de représentations scientifiques élaborées par la théorie financière, représentations incluant des modélisations mathématiques très abstraites. En ce sens, la théorie financière contemporaine façonne progressivement le monde social à son image, mise en forme qui soulève la question de son arrière-plan théorique en raison même de ces effets sociétaux : quel type de monde veut-on construire ?

En effet, une théorie qui se présente comme scientifique peut être porteuse de normes morales qu'elle tend à imposer sous couvert d'une neutralité axiologique (de Bruin, 2015). Il peut dès lors exister un conflit de valeurs entre les normes morales souhaitables pour une société visant un bien collectif, et les normes morales implicites transportées par une théorie donnée. Cette résistance aux normes apparaît dans la réglementation, qui représentera dans ce cas un frein au façonnage de la société par la théorie, conduisant à des enjeux réglementaires dans la volonté de transformation des activités par la représentation scientifique. Les débats réglementaires qui ont précédé l'installation des normes comptables IFRS ou l'application de la directive 2009/138/CE du Parlement européen dite « Solvabilité II » sont une illustration de ces enjeux de changement de normes. Dans ces deux exemples, l'objectif du régulateur a été de concrétiser la notion abstraite d'efficacité informationnelle d'un marché associée à une morphologie particulière de l'incertitude, à travers un ensemble de normes financières réglementaires. Mais d'autres mises en forme seraient possibles, résultant d'une autre théorisation.

La représentation du monde de la théorie financière a ainsi transformé progressivement, mais inexorablement, les pratiques professionnelles puis les environnements de travail (Walter, 1996, 1999). Ce corpus scientifique de la finance actuelle est issu de plusieurs transformations conceptuelles importantes qui sont advenues au cours du ^{xx}^e siècle, et qui ont profondément modifié les

méthodes mathématiques des techniques financières. C'est l'objet du présent article que de revenir sur deux étapes majeures de cette transformation de longue durée, que l'on propose de nommer les deux quantifications de la théorie financière. Il a été montré qu'il existe des relations entre les systèmes de quantification et les modes de gouvernement. Par exemple, une conceptualisation du rôle de l'Etat s'accompagne d'un certain type d'outillage statistique (Desrosières, 2003). L'idée qui sous-tend ces travaux est qu'un changement de système de quantification entraîne un changement plus global de la sphère économique. Aussi l'analyse du fonctionnement des systèmes de quantification et de leur transformation est indispensable pour une plus grande intelligibilité des transformations en cours dans les milieux financiers contemporains et des enjeux de financiarisation évoqués au début la compréhension des transformations de l'économie et de la finance. C'est la raison pour laquelle nous introduisons ici l'histoire de ces quantifications. Dans ce sens, le présent travail représente un effort pour intégrer à la réflexion philosophique et sociologique quelques-unes des méthodes de la finance mathématique. Ce n'est pas à proprement parler un travail d'histoire de la théorie financière. Ainsi, la bibliographie n'a pas pour objectif de prétendre à l'exhaustivité mais seulement à un accès aux textes principaux qui fondent ces transformations.

L'article est organisé comme suit. La première partie aborde le principe de la quantification de la théorie financière en présentant les chemins de cette quantification. Les deux parties suivantes décrivent successivement la première et la seconde quantification. Afin de saisir les manières dont ces quantifications agissent sur les méthodes financières, la seconde partie présente un exemple élémentaire d'un marché stylisé à l'équilibre pour permettre de mettre en miroir les mêmes grandeurs financières chiffrées par la première puis la seconde quantification. Cet effet de miroir permet de visibiliser la transformation fondamentale apportée par la seconde quantification à la représentation cognitive des marchés financiers. La troisième partie est une illustration de cette transformation sur une méthode classique d'évaluation, la valeur actuelle d'une suite de flux financiers futurs, pour faire apparaître comment la seconde quantification modifie cette technique initialement simple. La conclusion ouvre sur la question plus générale des rapports entre convention de quantification et éthique financière.

La quantification du risque financier

Dans les sciences, la quantification consiste à attribuer un chiffre à une grandeur particulière. Dans la finance, une grandeur essentielle à quantifier est le risque associé à une opération (par exemple un achat de titres sur un marché, un octroi de crédit bancaire, une vente de droits éventuels). Lorsque le risque a été quantifié, il devient possible de l'acheter, de le vendre ou de le fractionner, et des activités professionnelles s'élaborent et s'organisent sur cette possibilité. C'est en ce sens que la finance peut être qualifiée de « filière scientifique et industrielle du risque » (Armatte, 2010).

La quantification du risque est effectuée en finance au moyen des probabilités. La quantification du risque par les probabilités consiste à considérer que les grandeurs financières sont des variables aléatoires et que leur évolution au cours du temps est un processus aléatoire. La calculabilité des gains et des pertes devient alors une application des probabilités, et les outils de ce calcul deviennent les outils de la pratique financière. La probabilisation du risque financier fit l'objet de travaux extrêmement nombreux dans la recherche financière et actuarielle, et déclencha des controverses sur les modélisations du risque, ouvertes à la suite des propositions de Mandelbrot contestant le paradigme de continuité des aléas financiers (Walter, 2002a), que nous ne présenterons pas ici. Nous n'abordons pas non plus les débats sur la possibilité d'assimiler l'incertitude financière à un risque probabilisable, nous limitant à la présentation des deux quantifications de la théorie financière.

La mise en place de la quantification du risque financier

Toute quantification est le résultat de deux opérations (Desrosières, 2000): tout d'abord la mise en place d'une convention sur ce qui est à calculer, deuxièmement la mise en place d'un dispositif qui permet la mesure de la grandeur à calculer. La rationalité des agents porte sur ces deux dimensions : d'une part sur les calculs financiers, mais d'autre part sur le fait de se mettre d'accord entre eux sur les manières de calculer. Le calcul des probabilités appliqué au risque relève de la convention sur ce qui est à calculer.

Les dispositifs qui installent ces calculs dans les pratiques professionnelles

La calculabilité n'est pas donnée d'emblée, il faut la construire en organisant les marchés d'une manière telle que les règles de fonctionnement des bourses assurent la possibilité de la transposition en finance du cadre axiomatique du calcul des probabilités. Il faut donc non seulement établir des règles de calcul pour la quantification des gains et des pertes probables, mais aussi établir des règles sur les règles correspondant à l'organisation institutionnelle des échanges sur les marchés financiers qui permettent à cette quantification d'exister. C'est la mise en place de ce dispositif – qui permet la mesure de ce qui est à calculer – qui représente la seconde opération de la quantification. Par exemple, la « loi en racine carrée du temps » est installée dans les pratiques professionnelles par les réglementations internationales sur la solvabilité des banques (les accords dits de « Bâle III ») ou des compagnies d'assurance (la directive « Solvabilité II »), qui imposent aux professionnels financiers des règles de calcul de risque qui suivent cette loi.

La mémoire financière des professionnels des marchés contient donc non seulement les historiques de prix passés avec leur volatilité et les autres paramètres des lois (dispersion, asymétrie) et des processus aléatoires, c'est-à-dire ce qui relève de la convention sur ce qui est à calculer, mais elle contient aussi les règles d'organisation des échanges, c'est-à-dire ce qui relève du dispositif de calcul.

La probabilisation du risque financier : une double convention

Lorsqu'on décide de probabiliser la morphologie de l'incertitude financière, il s'agit de construire une probabilité qui représente au mieux cette morphologie à une échéance donnée (donc le choix d'une loi de probabilité), et un processus qui permet le passage d'une échéance à l'autre (donc le choix d'un processus aléatoire). Il existe donc deux aspects de la probabilisation du risque : statique et dynamique. D'où une double convention : sur la statique, la loi de probabilité du risque à une échéance donnée ; et sur la dynamique, le processus aléatoire d'évolution du risque au fil du temps.

La loi de probabilité des variations ou des rentabilités de l'actif porteur du risque à une échéance donnée (par exemple un mois, un an) définit

deux dimensions du risque financier : son amplitude et sa forme. L'amplitude du risque est mesurée par la dispersion possible des rentabilités à l'échéance considérée : elle peut être par exemple faible ou forte. Le paramètre d'écart type mesure typiquement cette dimension, mais d'autres quantités seraient possibles (intervalle interquartile, écart absolu moyen etc.). La forme du risque est l'image que cette dispersion présente au regard : symétrique ou dissymétrique de part et d'autre de la moyenne, resserrée ou dilatée de part et d'autre de la moyenne.

En assimilant l'incertitude à un risque probabilisable, la loi de probabilité représente donc une expression mathématique de la morphologie de l'incertitude financière à la date de l'échéance. Les valeurs typiques de cette loi (c'est-à-dire les paramètres qui la résument, comme l'espérance mathématique, l'écart type, les paramètres d'asymétrie et d'aplatissement) représentent des repères quantitatifs pour les professionnels en fournissant des valeurs numériques à la dispersion et à la forme du risque.

La quantification du risque sur une seule échéance donnée n'est pas suffisante. Il faut également pouvoir quantifier la manière dont ce risque évolue au fil du temps : il est nécessaire, non seulement de définir des lois de probabilité pour une échéance fixée, mais aussi la manière dont se déforment ces lois au cours du temps. Imaginons que l'on ait quantifié le risque sur un horizon d'un mois, comment extrapole-t-on sa quantification à douze mois ? Cette question renvoie à une autre, celle des échelles de temps sur les marchés et aux enjeux que soulève un changement d'échelle (Walter, 2002b). La théorie des processus aléatoires répond à ces problématiques de changement d'échelle. Il est donc nécessaire de mettre en place une modélisation, non seulement en termes de lois de probabilité mais aussi en termes de processus aléatoires.

Par exemple avec un mouvement brownien (le processus aléatoire massivement utilisé dans les quantifications de la théorie financière), le passage du risque d'une échelle donnée au risque d'une autre échelle s'effectue au moyen d'un coefficient multiplicatif qui est égal à la racine carrée de la durée séparant les deux échelles. Dans la représentation brownienne du risque financier, le risque à un horizon de douze mois s'obtient à partir du risque à un mois que multiplie la racine carrée de douze. La « dilatation » du risque suit dans

ce cas une règle très simple dite en « racine carrée du temps ». Cette règle résulte seulement d'une *convention de mathématisation du risque* issue d'un choix particulier de processus aléatoire, le mouvement brownien. D'autres conventions de mathématisation seraient possibles, qui produiraient une loi de dilatation différente avec d'autres processus aléatoires (processus de Lévy, processus ARCH, processus multifractals etc.).

Un exemple élémentaire

Donnons un exemple élémentaire statique de la manière dont la première quantification traite les grandeurs financières en appréhendant le monde des marchés par les probabilités. Imaginons une société quelconque pour laquelle les analystes financiers ont élaboré deux scénarios économiques à un horizon donné : croissance ou décroissance. Au jour de l'évaluation, le cours coté en bourse de l'action (ou sa valeur si la société n'est pas cotée) est 150 euros. Dans le premier scénario (version optimiste du futur de l'entreprise), la valeur de l'action de cette société serait par exemple 200 euros. Dans le second scénario économique (plus pessimiste sur les perspectives économiques), la valeur de l'action chuterait à 140 euros. Imaginons qu'aucun scénario ne soit privilégié par rapport à l'autre : les deux perspectives économiques sont supposées équiprobables et la probabilité de chaque scénario est donc de 0,50. C'est une probabilité (P) posée sur le phénomène économique. Evidemment, cette probabilité pourrait être différente, et n'importe quelles autres valeurs seraient possibles (tant que la somme des probabilités de chaque scénario reste égale à 1). Les deux probabilités de 0,50 appliquées aux deux valeurs prévisionnelles de 140 et 200 euros représentent la distribution de probabilité (P) de la valeur future de la société.

L'écart type de la rentabilité attendue mesure l'amplitude de la dispersion potentielle des rentabilités à une échéance donnée autour de l'espérance mathématique de rentabilité. C'est la « volatilité » sur les marchés financiers. Dans cet exemple élémentaire, les deux valeurs futures possibles étant respectivement 140 et 200 euros, les rentabilités futures possibles sont 140/150 soit -6,67% et 200/150 soit +33,33%. L'espérance mathématique de la rentabilité (ou rentabilité espérée) s'obtient par la moyenne pondérée des deux rentabilités futures prévisionnelles avec les probabilités correspondantes, soit :

$-6,67\% \times 0,50 + 33,33\% \times 0,50 = +13,33\%$. L'écart type des deux rentabilités futures possibles autour de 13,33% est 20%. Si l'on mesure par la volatilité le risque de s'investir sur cette société, on dira dans le jargon des marchés financiers que la volatilité de cette société est 20%, qui représentent le risque de ce placement. La convention de représentation classique de la théorie financière des années 1960 (voir plus loin) décrit les caractéristiques probabilistes de la société par un couple rentabilité espérée / risque attendu de (13,33%, 20%).

Dans cet exemple élémentaire, les valeurs futures prévisionnelles sont connues et correspondent à différents scénarios d'états du monde futur possible. Les états du monde sont en nombre fini (ici il y en a deux). Dans le cas général, il n'est pas nécessaire de connaître en détail ces différents états du monde, les valeurs typiques de la loi de probabilité résumant l'information probabiliste nécessaire à l'évaluation et à la prise de décision. La loi de probabilité choisie pour représenter la morphologie de l'incertitude financière est utilisée pour déterminer les « chances » de se situer à l'intérieur de bornes de valeurs prédéfinies. Ces bornes dépendent du niveau de confiance que l'on cherche à atteindre : plus on veut être « sûr » de se trouver entre deux bornes, plus l'intervalle entre ces deux bornes sera grand. Par exemple avec l'hypothèse d'une loi normale, les valeurs possibles seront comprises avec 66% de « chances » dans un intervalle dont l'amplitude est égale à deux écarts types, centré sur l'espérance mathématique. Ainsi une espérance de rentabilité de 13,33% associée à une volatilité de 20% signifiera, avec une hypothèse normale, que l'on peut s'attendre à une dispersion des rentabilités telle que, dans 66% des situations à l'échéance, la rentabilité effectivement obtenue sera comprise entre 13,33% augmenté et diminué de 20%, soit l'amplitude ($-6,67\%$, $+33,33\%$). Evidemment, avec une autre loi, comme par exemple la première loi de Laplace, la fourchette obtenue aurait été différente.

Les deux quantifications de la théorie financière

A l'origine des choix de quantification, il faut un échantillon des valeurs des quantités à probabiliser : c'est la « base empirique » du phénomène financier. La construction de la base empirique reflète une succession de choix précis (choix de la mesure du temps, de la fréquence d'observation, de la durée de la période etc.) afin d'obtenir

l'échantillon recherché. Des mesures statistiques sont produites à partir de la base empirique du marché. Appelons F (pour « fréquence ») cette appréhension statistique du phénomène examiné.

A partir des statistiques fournies par la base empirique, le calcul des probabilités peut alors être mobilisé. Il s'agit de trouver la « meilleure » loi de probabilité et le « meilleur » processus aléatoire, c'est-à-dire qui s'ajustent au mieux aux « données ». Notons P (pour « probabilité ») la probabilité du phénomène issue des observations statistiques. La probabilité du phénomène (P) s'apparente à une probabilité « physique » dans le sens où elle s'appuie sur des données historiques relevées. On peut considérer que cette probabilité (P) décrit la morphologie de l'incertitude « objective » du phénomène financier examiné, les guillemets indiquant que le terme d'objectivité doit être pris avec précaution car il évacue la question de la construction de la base empirique. La mise en place de la probabilité (P) correspond à ce que nous appelons la première quantification de la théorie financière. Elle voit le jour dans les années 1950.

Avec ces notations, la première quantification en finance suit le chemin :

$$F \rightarrow P$$

Ce que nous proposons d'appeler (par analogie avec l'expression identique dans la mécanique quantique) la « seconde quantification » de la théorie financière est l'opération consistant à remplacer la probabilité du phénomène (P) par une nouvelle probabilité (Q) qui décrit, non pas la morphologie de l'incertitude relative aux données financières historiques, mais la morphologie d'une autre incertitude, qu'on extrait des prix du marché une fois celui-ci arbitré par les agents et qui exprime donc, en quelque sorte, ce qui se trouve « dans la tête » des agents, leurs croyances ou leurs représentations mentales. Pour cette raison, cette probabilité a parfois été appelée « subjective ». A nouveau, les guillemets indiquent que ces expressions sont imprécises et ne doivent pas être interprétées simplement en terme de points de vue individuels « subjectifs » face un phénomène financier « objectif ». De la même manière que pour la première quantification, la seconde quantification peut se résumer par le schéma suivant :

$$P \rightarrow Q$$

Le processus global de quantification de la théorie financière suit donc le schéma :

$$F \rightarrow P \rightarrow Q$$

Détaillons maintenant ce en quoi consistent ces deux quantifications de la théorie financière.

La première quantification : les années 1960-1970

La première quantification de la théorie financière correspond à la mathématisation de Markowitz-Tobin-Sharpe (1952-1964) pour la théorie du portefeuille et le modèle d'équilibre des marchés (« *Capital Asset Pricing Model* », CAPM) et celle de Fama-Samuelson-Jensen pour la théorie de l'efficacité informationnelle d'un marché (1970-1976). Elle consiste en un passage des techniques classiques de la gestion financière à la probabilisation des problèmes financiers avec une probabilité « physique » ou « historique » (P), qui est la probabilité du « phénomène » financier, et à leur mathématisation par les techniques d'optimisation.

Le programme de Markowitz

Harry Markowitz s'intéresse au problème de la composition des portefeuilles et développe ce qui sera appelé par la suite la « théorie des choix de portefeuille ».

L'optimisation du couple rentabilité / risque

Cette théorie postule que, lorsque l'on cherche à répartir son épargne entre différents placements ou types de placement (actions, obligations, bons du Trésor), les deux seuls critères de choix des supports d'investissement qu'il faut retenir sont la rentabilité espérée du placement et le risque associé (mesuré par l'écart type des rentabilités attendues ou son carré, la variance) : le couple (13,33%, 20%) de l'exemple précédent. Cette représentation des choix de portefeuille a conduit à modifier radicalement les pratiques professionnelles comme nous le verrons plus loin.

L'analyse des placements par un couple rentabilité espérée / risque attendu n'est pas en soi une idée neuve et « l'idée selon laquelle les choix incertains s'apparentent à un arbitrage entre rendement et sécurité remonte probablement à la plus haute antiquité; sa formalisation mathématique date de la fin du XVIII^e siècle » (Pradier, 2000, p. 86). De fait, Markowitz n'a pas revendiqué l'origine

du raisonnement en termes de couple rentabilité / risque : « évidemment, les gens agissaient en se fondant sur l'idée d'associer la rentabilité au risque bien avant 1952 » (Markowitz, 1992, p. 13). Quel est l'apport de Markowitz ? : « Mon apport a consisté à présenter une théorie formelle de ce comportement ». L'apport de Markowitz est donc celui d'une formalisation mathématique, la résolution d'un problème technique connexe à la gestion. Cette formalisation ne cherche pas à interférer avec la prévision financière, celle-ci étant vue comme un art qui ne relève pas de la science proprement dite. Ce que Markowitz précise ainsi : « le processus de construction de la composition d'un portefeuille peut être divisé en deux parties. La première étape commence avec l'observation et l'expérience, et conduit à la formation de prévisions sur les performances futures des titres existants sur le marché. La deuxième étape commence avec l'utilisation de ces prévisions, et se termine avec la répartition des fonds entre les différents actifs (« *asset allocation* »). Cette deuxième étape seule est l'objet de l'article » (Markowitz, 1952).

La convention des années 1960 sur la morphologie de l'incertitude

Les deux hypothèses importantes de la théorie de Markowitz concernent la modélisation des préférences des investisseurs et la probabilisation des rentabilités des actifs. Il faut supposer que les préférences des individus admettent une représentation dans le plan espérance-variance et qu'il est possible de construire l'ensemble des portefeuilles selon ces préférences. À partir de ces deux critères, ce qui est appelé le « modèle de Markowitz » fournit la répartition dite « optimale » des actifs dans le portefeuille.

La formalisation de Markowitz réduit ainsi le risque à la variance. C'est la convention de représentation des années 1960. La morphologie de l'incertitude suit la représentation gaussienne.

La surprise du bêta

L'un des objets mathématiques importants de cette première quantification est le coefficient appelé « bêta » des titres.

Définition du bêta

Le bêta est un coefficient de proportionnalité qui exprime la sensibilité de la variation d'un titre par rapport à celle du « marché » (l'ensemble des

titres). Ce coefficient quantifie précisément la réactivité d'un titre par rapport aux mouvements globaux de l'ensemble des titres. Par exemple, si le prix du titre augmente de 5% lorsque l'ensemble des titres augmente de 4%, alors son bêta par rapport à cet ensemble sera égal à $5/4$ soit 1,25. Du point de vue de la mesure du risque absolu, si un titre amplifie les mouvements du marché, cette amplification des variations relatives produira une amplification des variations absolues. En adoptant la volatilité comme convention de mesure du risque de variation absolue, un bêta plus élevé conduira à une volatilité plus grande.

Pour représenter la variation du « marché » (les guillemets indiquent que cette notion doit être spécifiée), on calcule la moyenne des variations des titres, pondérée ou non par le poids que représente la société dans la cote, sa capitalisation boursière. Les indices représentatifs du marché (CAC 40, Dow Jones, Euro Stoxx 50 etc.) sont construits selon l'un ou l'autre principe de calcul (pondération ou non). Chaque indice conduit à une valeur différente du coefficient bêta. Si l'on considère l'indice de marché comme un portefeuille, le bêta n'est rien d'autre qu'un coefficient qui indique comment varie l'un des titres du portefeuille par rapport au portefeuille dans son ensemble. La quantification du risque financier d'un titre prend ici la forme d'une mesure du risque relatif de ce titre par rapport au marché. Le coefficient bêta « fait du nombre » au sens de Desrosières () dans ce sens.

Les trois bêtas

L'histoire des instruments financiers et des pratiques professionnelles (voir ci-dessous) fait apparaître que cet objet mathématique appelé bêta n'est pas issu d'une impulsion réglementaire ou d'un besoin des professionnels mais qu'il les a précédés. Le bêta n'est donc pas une quantité initialement financière.

L'histoire intellectuelle de la modélisation financière mathématique montre que le bêta est apparu comme une conséquence mathématique imprévue mais directe du programme d'optimisation de portefeuille qui était l'objectif de la recherche de Markowitz (Walter, 2004). La première quantification résulte en partie de cette surprise mathématique.

La genèse du bêta représente un exemple de croissance interne des mathématiques financières, une situation dans laquelle cette croissance créative précède la réflexion économique. On se trouve ici face à un cas de développement endogène des mathématiques financières qui, en quelque sorte, « avancent d'elles-mêmes » sous l'effet de leur propre poussée créative, avant tout besoin de production d'instruments financiers et indépendamment de contextes sociaux qui les feraient émerger. L'écriture mathématique précède l'écriture juridique, idée exprimée – involontairement – dans le jargon des professionnels qui disent « écrire une option ». Dans ce sens, la finance est un processus d'écriture (Ayache, 2010 ; Muniesa, 2013).

Le bêta « mathématique » (celui du programme de Markowitz de 1952) précéda ainsi le bêta « statistique » (celui du modèle linéaire de Sharpe de 1963) pour enfin être identifié plus tard au bêta « financier » (celui du modèle d'équilibre des titres dans le CAPM de 1964). Qu'il ait fallu douze années pour passer du bêta mathématique au bêta financier illustre à quel point ce passage n'était pas immédiat en soi.

Découverte du bêta : le bêta mathématique de 1952

Résoudre le programme de Markowitz revient à trouver les quantités « optimales » de titres à détenir dans un portefeuille en choisissant comme critère d'optimalité la maximisation de la rentabilité espérée sous contrainte de risque (ou la minimisation du risque sous contrainte de rentabilité

Tableau 1. Les trois types de bêta dans la première quantification

Année de la publication	« type » de bêta	Portefeuille de référence pour le calcul du bêta
1952	Bêta mathématique	portefeuille MV-optimal
1963	Bêta statistique	indice représentatif du marché
1964	Bêta financier	portefeuille de marché MV-optimal tangent

espérée). Pour cela, il suffit d'appliquer à la finance les techniques d'optimisation largement utilisées ailleurs. Le couple rentabilité / risque étant quantifié par la moyenne prévue (M) et la variance prévue (V) des rentabilités, on écrit la fonction de Lagrange (ou lagrangien) sur ce couple, pour exprimer mathématiquement l'objectif de maximisation de la rentabilité sous contrainte de variance, la somme des poids des titres devant par construction être égale à 100%. On dérive ensuite le lagrangien pour obtenir son gradient, puis on cherche à annuler le gradient (la condition d'optimalité du premier ordre : l'annulation d'une dérivée conduit à un maximum local). La résolution du système d'équations conduit à l'obtention des quantités recherchées, qui sont les poids optimaux selon le critère moyenne/variance, ou poids « MV-optimaux ». Le portefeuille est « MV-optimal » dans ce sens précis : en tant qu'il répond à un programme d'optimisation en moyenne et variance. L'écriture mathématique du système d'équations fit alors apparaître un coefficient particulier qui liait linéairement les rentabilités espérées des titres composant le portefeuille MV-optimal à la rentabilité espérée du portefeuille MV-optimal lui-même. L'interprétation financière de ce coefficient restait à trouver. Ce fut la surprise du bêta, qui illustre comment une construction mathématique devint une source de signification financière, pivot de la première quantification de la théorie financière.

Si la variance était nulle, que se passait-il ? C'est à cette question que répond James Tobin en 1958, en publiant un article fondamental intitulé « Liquidity Preference as Behavior Towards Risk ». Que se passerait-il dans le modèle de Markowitz si l'un des actifs utilisés dans la composition du portefeuille MV-optimal était sans risque (par exemple un bon du Trésor) ? Mathématiquement, dans le sens restreint de la convention des années 1960, un actif sans risque est un actif de variance nulle. Comme le dit Tobin, « si l'un des actifs du modèle de Markowitz était non risqué, cela aurait une conséquence intéressante ». Laquelle ? La résolution du programme d'optimisation avec un actif de variance nulle conduit à obtenir dans le plan espérance / écart type, à la place de l'hyperbole de Markowitz, une demi-droite dont l'origine est la valeur de la rentabilité certaine de l'actif sans risque. Si nous considérons alors les deux frontières de Markowitz (avec et sans demi-droite), nous trouvons un point de tangence qui correspond un portefeuille MV-optimal

très particulier, appelé pour cette raison « portefeuille MV-optimal tangent ».

Mathématiquement, Tobin montre alors que la seule décision à prendre pour quiconque cherche à composer son portefeuille de la meilleure manière possible n'est pas de choisir des titres selon les critères rentabilité espérée / risque attendu, mais seulement de choisir une proportion donnée (x %) à investir dans le portefeuille MV-optimal tangent, le reste ($1-x$ %) étant investi en actif non risqué. La proportion x % est donnée par la quantification de l'attitude de l'acheteur devant le risque, au moyen des formalisations des fonctions d'utilité. Cette répartition entre placement sans risque et portefeuille MV-optimal tangent sera appelée par la suite dans les pratiques professionnelles « décision stratégique d'investissement » ou « stratégie de répartition des fonds » (« *strategic asset allocation* »). Par rapport au programme initial de Markowitz, il s'agit d'un déplacement intellectuel important sur la manière de concevoir une allocation d'actif qui soit « la meilleure possible en fonction du couple rentabilité / risque ».

Quelque chose d'extrêmement important pour les manières de concevoir la construction des portefeuilles d'actifs vient d'être injecté dans les années 1960 bien que cette innovation ne fut pas perçue immédiatement dans toute son ampleur et pour toutes ses conséquences pratiques. Le cadre d'optimisation moyenne-variance ne prenait en compte que les moments d'ordre 1 et 2. Cette convention de quantification impliquait que la notion de risque soit résumable par le seul moment d'ordre 2, sa variance.

Pratique du bêta : le bêta statistique de 1963

Avec le modèle de Markowitz, il y a un problème pratique à résoudre. Il faut disposer des valeurs numériques des termes qui entrent dans le calcul d'optimisation, donc les estimer statistiquement ou les fixer par anticipation, et le nombre de ces termes est grand. En effet, si le calcul de la moyenne de la rentabilité du portefeuille est direct (moyenne pondérée des rentabilités de chaque titre), il en va autrement de la variance de la rentabilité, qui est une combinaison linéaire des variances des rentabilités des titres qui le composent et de la covariance des rentabilités des titres entre elles. Pour n titres (actifs) dans un portefeuille, s'il n'y a que n moyennes de rentabilités attendues, il y a n termes de variance et $n^2 - n$

termes de covariance. Comme la covariance entre deux titres ne dépend pas de l'ordre entre ces titres, le nombre de termes à estimer pour la composante « risque » est divisé par deux soit $(n^2-n)/2$. Autrement dit, pour n actifs, l'estimation des valeurs numériques nécessaires à la résolution du programme de Markowitz impose de déterminer n termes de variances et $(n^2-n)/2$ termes de covariance soit $n(n+1)/2$ termes de « risque » au total. Par exemple, pour $n = 100$ titres, cela conduit à l'estimation de 5 050 termes. En 1952, les capacités de calcul limitées des professionnels de la gestion rendent inapplicable cette méthode. C'est là qu'intervient l'apport de l'étudiant en thèse de doctorat de Markowitz, William Sharpe.

L'idée de Sharpe (1963) fut de considérer le « marché » comme une « cause commune » des variations de chaque titre représentée par un indice boursier, et de chercher comment le titre examiné variait par rapport à cette cause commune : amplifiait-il ou réduisait-il les mouvements du marché ? Le problème de Markowitz fut ainsi grandement simplifié en introduisant un modèle économétrique linéaire à indice de marché dont la conséquence technique est une diagonalisation de la matrice de variance-covariance. La relation postulée par Sharpe en 1963 pour un marché est appelée le modèle linéaire de marché de Sharpe. Il est essentiel de ne pas le confondre avec le modèle d'équilibre des actifs financiers (CAPM voir ci-dessous) que Sharpe élabore en 1964. Avec la modélisation de Sharpe de 1963, la covariance entre deux actions devient très simple. Pour n titres, le modèle linéaire de marché fait passer la quantité de termes à estimer de $n(n+1)/2$ à $3n$. Par exemple, pour $n = 100$ titres, le nombre de termes passe de 5 050 avec le modèle initial de Markowitz à 300 avec le modèle modifié de Sharpe. L'informatique naissante permet à Sharpe d'envisager une série de tests pratiques en développant lui-même un programme de calcul approprié, le programme RAND QP code. Nous retrouvons ici l'importance de la Rand Corporation dans la recherche économique appliquée américaine des années 1960 (Dahan et Pestre, 2004).

Grâce à cette réduction drastique, Sharpe (1963, p. 285) indique que le temps de calcul nécessaire à la résolution du problème du portefeuille pour 100 titres passe de 33 minutes sur un ordinateur IBM 7090 avec le modèle de Markowitz, à 30 secondes avec son propre modèle. Inversement,

la capacité réduite requise pour son modèle permet de traiter plus de titres à temps égal : avec un ordinateur IBM 7090, il est possible de traiter, soit 249 titres avec le modèle de Markowitz, soit plus de 2 000 avec le modèle linéaire. Aussi, Sharpe peut conclure son article de 1963 par cet encouragement à l'utilisation de son modèle : « Pour ces raisons, le choix du modèle linéaire semble être excellent pour une première application pratique de la méthode de Markowitz. » Le bêta statistique est né.

Economie du bêta : le bêta financier de 1964

Il restait à « identifier » sur le marché ce que pouvait être le portefeuille MV-optimal tangent, c'est-à-dire, à nouveau, à donner un sens financier à une écriture mathématique. Une fois encore, les mathématiques financières ont précédé les « réalités » financières, dans la mesure où c'est la construction mathématique qui devient ensuite une source de significations. En 1964, Sharpe démontra mathématiquement que, si le marché était efficace au sens informationnel (dans le sens de Fama, voir plus bas), le portefeuille MV-optimal tangent était alors le portefeuille composé de tous les titres de la cote pour autant que toute l'économie soit cotée. Cette construction abstraite qui « identifie » le portefeuille MV-optimal tangent au « marché » dans le sens du modèle linéaire de 1963 est le principal résultat du modèle d'évaluation des actifs financiers (CAPM), qui valut à Sharpe le prix de la banque de Suède en mémoire d'Alfred Nobel (ou « prix Nobel d'économie ») en 1990.

Avec cette association, il devenait inutile de chercher à construire des portefeuilles avec des choix de titres judicieux issus d'un savoir-faire de professionnels aux salaires élevés, puisque aucune gestion active, même appuyée sur des solides compétences professionnelles d'analyse financière, ne pourrait produire une meilleure performance que celle du « marché » en tant qu'il était MV-optimal tangent. Cette idée marqua l'avènement d'une nouvelle activité financière, la fabrication d'indices représentatifs du « marché ». Mais les indices fabriqués n'étaient pas exactement MV-optimaux tangents et des problèmes pratiques apparurent très vite avec leur utilisation car les bêtas calculés étaient biaisés par rapport aux bêtas théoriques issus d'indices MV-optimaux tangents.

Le fonctionnement de la première quantification

Nous allons présenter la manière dont la première quantification a traité les grandeurs financières en appréhendant le monde réel des marchés par les instruments théoriques issus de la surprise du bêta. Pour ne pas alourdir l'exposé avec d'inutiles complexités de modélisation qui auraient pour effet de produire un brouillage mathématique des enjeux de cette représentation du monde financier, nous choisissons délibérément un exemple très stylisé, dont la simplicité même permettra d'accéder aux enjeux cognitifs de la quantification.

Détermination de la relation entre le présent et le futur : une société

Considérons à nouveau l'exemple élémentaire introduit plus haut. La valeur future espérée de l'action avec des deux scénarios équiprobables est la moyenne pondérée des deux valeurs prévisionnelles avec les probabilités correspondantes, soit : $140 \times 0,50 + 200 \times 0,50 = 170$ euros. Remarquons à ce stade de la présentation que rien ne garantit que les valeurs futures prévisionnelles aient une quelconque proximité avec la situation économique de l'entreprise. Il serait tout aussi possible d'imaginer des valeurs futures prévisionnelles issues, non de calculs d'analyse financière, mais de rumeurs sur des évolutions potentielles de l'entreprise en dehors de tout calcul de scénario économique. La valeur actuelle est issue de cette croyance et de ces représentations.

La valeur actuelle est 150 euros. Il apparaît par déduction que le facteur d'actualisation qui ramène la valeur future espérée (170 euros) à la valeur actuelle est égal à $150/170 = 0,8824$, ce qui représente un taux d'actualisation de 13,33%. La valeur actuelle de 150 euros représente donc une valeur future espérée actualisée à un taux de 13,33%, soit :

$$150 = \frac{140 \times 0,50 + 200 \times 0,50}{1 + 0,1333}$$

Ce taux de 13,33% représente le taux d'actualisation qui équilibre le marché du titre en fonction de la volatilité des valeurs prévisionnelles de 20% : c'est une croyance collective sur le risque.

Une fois l'information considérée comme pertinente par les professionnels « passée » dans le

cours coté (« l'information est dans les cours » disent les professionnels), alors le cours présent (ici 150 euros) contient la meilleure prévision du cours futur attendu (au sens de son espérance mathématique). Ici, l'information recouvre tout ce qui a permis de former les cours cibles des scénarios, incluant leur dispersion potentielle.

Détermination de la relation entre le présent et le futur : plusieurs sociétés ou « le marché »

Elargissons maintenant notre exemple en introduisant le « marché ». Pour conserver la simplicité mathématique de l'exemple, nous limitons le marché à deux sociétés. La première société est celle vue précédemment, que nous notons société A. Il existe une seconde société notée B qui, comme la première, fait l'objet de prévisions d'analystes financiers. Imaginons que le cours coté en bourse soit 66 euros. Dans le premier scénario économique, la valeur de l'action de cette société serait par exemple 50 euros. Dans le second scénario, elle monterait à 120 euros.

Un raisonnement similaire à celui tenu avec la société A peut être tenu avec la société B. Dans le monde du « phénomène » (P) l'équation de la valeur actuelle est :

$$66 = \frac{50 \times 0,50 + 120 \times 0,50}{1 + 0,2879}$$

Le taux de 28,79% représente le taux d'actualisation qui équilibre le marché du titre.

Il est possible d'écrire différemment les relations précédentes. Le chiffre de $1 + 0,1333 = 1,1333$ est un facteur de capitalisation, qui permet de calculer une valeur future à partir de la valeur d'aujourd'hui. Son inverse, soit $1/1,1333 = 0,8824$ est un facteur d'actualisation. Avec ce facteur, la relation sur A s'écrit :

$$150 = 0,8824 \times (140 \times 0,50 + 200 \times 0,50)$$

A l'instar de l'écriture précédente utilisant le facteur d'actualisation, la relation sur B s'écrit :

$$66 = 0,7765 \times (50 \times 0,50 + 120 \times 0,50)$$

Le taux de la rentabilité attendue pour un investissement sur la société A est de 13,33%. Conservons l'hypothèse d'un taux des placements non risqués (compte d'épargne, bon du Trésor, marché monétaire) sur cette même période de 2%. Dans le

cadre de la première quantification, cela veut dire que la prime de risque demandée par les investisseurs pour la société A est égale à $13,33\% - 2\% = 11,33\%$. De même, pour la société B, la prime de risque est égale à $33,04\% - 2\% = 31,04\%$. Si l'on considère le marché globalement, le système de prix cotés conduit au système des rentabilités attendues en fonction des primes de risque :

$$\begin{cases} 13,33\% = 2\% + 11,33\% \\ 33,04\% = 2\% + 31,04\% \end{cases}$$

L'arbitrage du marché

Il s'agit ici de comprendre comment se forme l'équilibre entre la valeur présente de la société et les valeurs futures prévues par les analystes financiers. Plus précisément, il s'agit de se demander si la valeur présente est cohérente avec les valeurs futures prévisionnelles. Si la valeur présente est cohérente avec les valeurs des scénarios, alors un équilibre s'est formé entre les prévisions des analystes, les attentes des agents, et les opérations des investisseurs qui ont conduit à l'établissement (dans l'exemple initial) de la valeur de 150 euros.

Dans le vocabulaire des économistes, la cohérence entre la valeur présente et les valeurs futures prévisionnelles est appelée un équilibre à anticipations rationnelles (« *rational expectations equilibrium* »), la rationalité indiquant ici une cohérence entre une valeur présente et l'information dont on dispose pour les valeurs futures prévues. Une formulation plus intuitive de « *rational expectations equilibrium* » pourrait être utilisée en français, en suivant la traduction de Jean de Largentaye de la *Théorie générale* de Keynes (1936), dans laquelle le terme « *expectation* » était traduit par « prévision ». On parlerait alors d'un « équilibre à prévisions cohérentes ». Une autre traduction serait également possible en utilisant « attendre » pour « *to expect* », dans le sens du commentaire de Durkheim sur la crise de 1929, dans lequel Durkheim parlait d'attentes collectives. Dans la mesure où ce lien entre le présent coté et le futur attendu repose sur les attentes collectives des agents, les croyances que forment les investisseurs en fonction d'une logique prévisionnelle qui doit être cohérente avec l'information disponible, on pourrait aussi traduire « *rational expectations equilibrium* » équilibre d'attentes cohérentes. L'équilibre du marché contient donc une idée de croyance collective partagée sur des valeurs

futures prévisionnelles, c'est-à-dire une croyance sur la rentabilité et les représentations du risque.

Les deux cours de A (150 euros) et de B (66 euros) forment un système de prix, le système (150,66) que l'on représente de la manière suivante :

$$\begin{cases} 150 = 140 \times 0,8824 \times 0,50 + 200 \times 0,8824 \times 0,50 \\ 66 = 50 \times 0,7765 \times 0,50 + 120 \times 0,7765 \times 0,50 \end{cases}$$

Dans le monde réel, il s'agirait de l'ensemble de la cote boursière. Nous allons supposer par la suite que l'économie est limitée à ces deux sociétés et qu'il existe des possibilités de placement non risqué (« marché monétaire »).

Un arbitrage est une opération financière qui permet d'obtenir un gain certain sans prendre le moindre risque. Par exemple avant l'avènement de l'informatique et des écrans d'ordinateur, à l'époque des cotations d'un même titre sur deux places boursières différentes, une action d'une même société pouvait coter simultanément à la bourse de Paris et à celle de New York avec deux cours différents. Dans cette situation, un arbitrage était possible, consistant à acheter l'un des titres à Paris et à le revendre à New York ou réciproquement. Puisqu'il s'agissait de la même société, l'écart de cours devait théoriquement se résorber, le mouvement de résorption produisant un gain sans risque pour celui qui avait pris position sur l'écart de cours. Cette situation était simple mais faisait apparaître ce qui constitue l'essence de l'arbitrage, un pari sur la réduction d'un écart de valeurs. L'on voit que tout arbitrage nécessite l'utilisation d'une fonction d'évaluation des titres, fonction qu'il faut choisir parmi plusieurs modèles d'évaluation possible, ce choix représentant une convention d'évaluation. Ainsi, de manière plus générale, une opération d'arbitrage consiste, à partir d'une fonction d'évaluation choisie, à trouver des occasions d'intervention sur des écarts de valeur, en pariant sur la réduction de cet écart sans qu'il y ait le moindre risque que cette réduction n'advienne pas.

Dans l'exemple élémentaire que nous avons présenté, le marché – le système de prix (150,66) – n'est pas arbitré car il existe des possibilités d'obtention de gain très élevé sans prendre aucun risque. En effet, il est possible de trouver un portefeuille composé des deux sociétés A et B (sur leurs cours de 150 et 66 euros) qui permette d'obtenir un taux de rentabilité dont la valeur ne dépend pas des scénarios, c'est-à-dire

d'un taux de rentabilité certain. C'est le cas par exemple si l'on achète 1029 titres de la société A à 150 euros et l'on vend à découvert 882 titres de la société B à 66 euros. Le mouvement de trésorerie est $-1029 \times 150 + 882 \times 66 = -96\,138$ euros, que l'on finance en les empruntant sur le marché de l'argent. Au moment du dénouement de l'opération en fin de période (remboursement de 96 138 euros augmentés des intérêts et rachat des 882 titres), on vérifie qu'on obtient une rentabilité de 4% quel que soit le scénario (pessimiste ou optimiste), donc sans aucune incertitude sur le résultat puisque ce résultat ne dépend pas des états possibles du monde (il est vérifié dans les deux scénarios).

Supposons que le taux sans risque soit 2%. Une telle situation est très intéressante : il suffirait d'emprunter au marché monétaire (2%) le montant permettant d'acheter ce portefeuille, d'obtenir la rentabilité certaine (4%) sans aucun risque, et d'encaisser ensuite la différence de rentabilité. Il apparaît donc une anomalie dans le marché, puisqu'il serait possible de dégager des gains très importants sans prendre de risque : il suffirait d'acheter des quantités très importantes de A, d'emprunter de quoi financer son achat, et de vendre autant de B que nécessaire. Une telle anomalie représente une incohérence dans la formation des cours en fonction des prévisions des cours cibles. Cette situation ne peut pas perdurer longtemps car tôt ou tard, quelqu'un (un opérateur de marché, un investisseur, un arbitragiste spécialisé) va la détecter et intervenir sur le marché pour en profiter. Ce faisant, par son intervention, il réduira l'arbitrage en sorte que, à l'issue de l'intervention, le marché aura été « vidé » de tout arbitrage possible. Il n'y aura plus de possibilité d'arbitrage (« *absence of opportunity of arbitrage* »).

Cette condition de non existence d'arbitrage représente le fondement des représentations des deux quantifications de la théorie financière.

L'opération d'arbitrage a pour effet de faire bouger les cours : l'achat de titres de la société A va faire monter le cours de A et la vente de titres de la société B va faire baisser celui de B. Imaginons que le cours de B s'ajuste seul. Ce cours va baisser jusqu'à ce que sa nouvelle valeur soit suffisamment basse pour que l'opération d'arbitrage ne dégagne plus de rentabilité certaine supérieure à celle de placements non risqués existants. Dans l'exemple utilisé, on trouve que la valeur de B après arbitrage est de 63,89 euros.

Avec cette nouvelle valeur, dans le monde du « phénomène » (P) l'équation de la valeur actuelle est :

$$63,89 = \frac{50 \times 0,50 + 120 \times 0,50}{1 + 0,3304}$$

Le taux de 33,04% représente le taux d'actualisation qui équilibre le marché du titre *arbitré*. Par rapport au taux précédent de 28,79%, il apparaît que la société B procurait une rentabilité trop faible relativement à la société A. L'arbitrage a eu pour effet d'augmenter la rentabilité de la société B. De nouveau, nous nous apercevons que l'arbitrage est toujours relatif et n'indique rien de ce que devrait être la rentabilité de la société B d'un point de vue économique. Il s'agit juste, d'une certaine manière, d'un test de cohérence des attentes des investisseurs, que ces attentes soient économiquement fondées ou non. Avec une autre société que la société A, une autre cohérence aurait surgi du marché. L'écriture en facteur d'actualisation est :

$$63,89 = 50 \times 0,7517 \times 0,50 + 120 \times 0,7517 \times 0,50$$

Tableau 2. Un marché stylisé avant et après arbitrage sur la société B

Observations		Croyances collectives partagées	
Cours cotés sur le marché en date 0		Cours cibles des analystes financiers pour la date 1	
AVANT arbitrage	APRES arbitrage	Scénario pessimiste	Scénario optimiste
150	150	140	200
66	63,89	50	120
Probabilité du phénomène (P)		0,50	0,50

Par l'action des arbitragistes, les cours se sont réajustés sur un nouveau niveau de prix, conduisant au nouveau système de marché :

$$\begin{cases} 150 = 140 \times 0,8824 \times 0,50 + 200 \times 0,8824 \times 0,50 \\ 63,89 = 50 \times 0,7517 \times 0,50 + 120 \times 0,7517 \times 0,50 \end{cases}$$

C'est la glu des marchés efficients.

Le tableau 2 résume le mouvement opéré sur le marché par le mécanisme d'arbitrage.

Indice de marché « CAC 2 »

Dans cet exemple, le « marché » est composé des deux seuls titres A et B. Il est donc nécessaire de construire l'indice de marché, c'est-à-dire de trouver les poids MV-optimaux des sociétés A et B dans l'indice. Appelons cet indice le « CAC 2 ». Comme on l'a vu, du point de vue de la première quantification, ce calcul résulte du programme d'optimisation de Markowitz, qu'on appliquerait ici sur les deux sociétés A et B. Si le marché est efficace au sens informationnel, le CAPM de Sharpe s'applique et les poids MV-optimaux des sociétés dans l'indice représentent leur capitalisation boursière dans la cote.

La résolution de ce programme conduit aux poids MV-optimaux recherchés : 73% de A et 27% de B. En appliquant ces poids sur les rentabilités espérées de A et de B, il est aisé d'en déduire celle de l'indice CAC 2 : $0,73 \times 13,33\% + 0,27 \times 33,04\% = 18,60\%$. La volatilité du CAC 2 s'obtient par le calcul de la variance. Le calcul des bêtas de A et de B, obtenus à partir des cours cotés de 150 et 66 euros, fournit respectivement, pour la société A, la valeur de 0,68 et pour B, la valeur de 1,87. Cela veut dire que si la rentabilité de l'indice CAC 2 augmente de 1%, celle de l'actif A augmentera de 0,68% et celle de l'actif B augmentera de 1,87%. L'actif B amplifie les mouvements du marché, tandis que l'actif A les amortit. De nouveau, nous nous apercevons que ces mouvements sont relatifs au portefeuille de marché, MV-optimal dans la théorie de Sharpe-Markowitz. Avec un autre portefeuille de marché, les valeurs des bêtas seraient différentes.

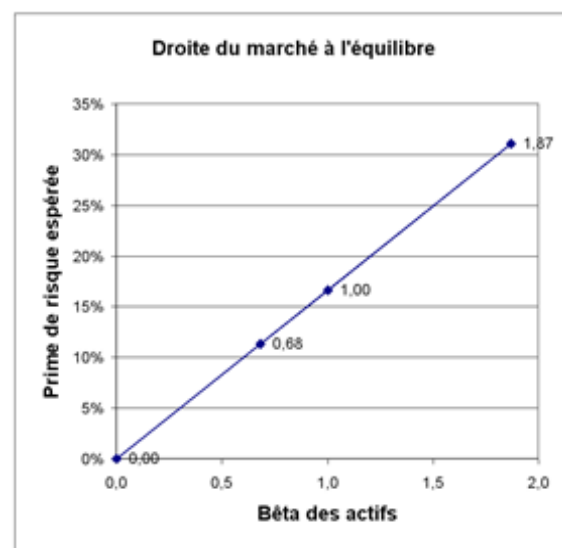
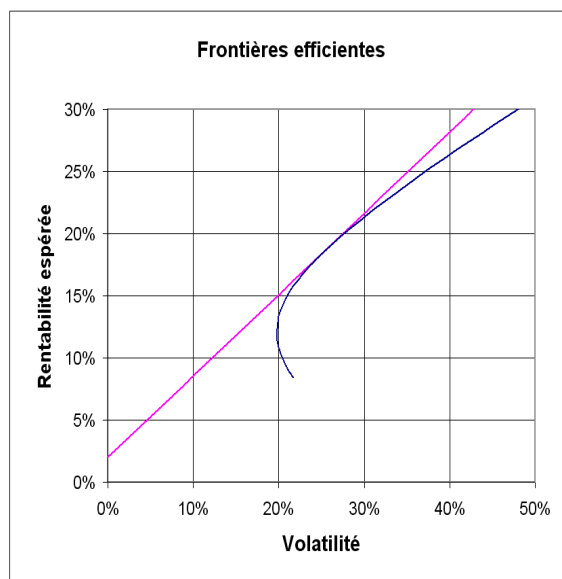
Primes de risque avec bêta

Dans la représentation de Sharpe (1964), la première quantification conduit à définir l'équilibre du marché au moyen d'un système d'équations (ici, deux équations puisqu'il n'y a que deux sociétés) :

$$\begin{cases} 13,33\% = 2\% + 0,68 \times (18,60\% - 2\%) \\ 33,04\% = 2\% + 1,87 \times (18,60\% - 2\%) \end{cases}$$

Ce sont les relations du CAPM. Elles conduisent à la droite de marché dans le plan bêta-prime de risque : les points représentant les titres A et B et le portefeuille de marché sont parfaitement alignés le long de cette droite.

Le graphique 1 présente ces deux représentations paradigmatiques de la première quantification.



Graphique 1. Deux images de la première quantification. Le plan espérance-variance (volatilité-rentabilité) de Markowitz (1952) et le plan bêta-prime de risque du CAPM de Sharpe (1964)

La seconde quantification de Harrison-Kreps-Pliska

La seconde quantification de la théorie financière correspond au remplacement de la probabilité (P) du phénomène par une nouvelle probabilité (Q) que l'on extrait des prix du marché une fois celui-ci arbitré. Cette nouvelle probabilité représente la morphologie de l'incertitude financière qui se trouve « dans la tête des agents », d'où sa dénomination de « probabilité subjective ». Le passage de l'une à l'autre probabilité s'effectue par un opérateur mathématique de changement de probabilité, l'opérateur de Radon-Nikodym qui correspond financièrement au noyau de l'évaluation de Lucas (1978) actualisé au taux sans risque.

La surprise de la probabilité duale

La nouvelle probabilité (Q) extraite du marché est apparue dans les premiers travaux de Ross (1976) comme une conséquence mathématique inattendue des effets de l'arbitrage. Ici, la surprise mathématique fut la découverte de ce que, une fois le marché arbitré, il était possible de réécrire la relation entre les cours présents cotés et les cours futurs actualisés attendus en choisissant un taux d'actualisation correspondant à des placements non risqués, cela en modifiant la probabilité des cours futurs attendus.

Le cours coté présent ne changeant pas, il suffisait de transférer les primes de risque espérées – qui disparaissaient donc du taux d'actualisation du dénominateur – dans la nouvelle probabilité du numérateur, en trouvant cette nouvelle probabilité par calage sur le marché, technique qu'on appelle l'évaluation « *market consistent* » dans les réglementations internationales.

Définition de la probabilité duale

Que peut-on dire de cette nouvelle probabilité ? Elle correspond à un univers dual au marché puisque le taux d'actualisation ne comporte pas de prime de risque et que le taux de rentabilité espéré d'un actif risqué est égal au taux des placements non risqués (on pourrait appliquer ce raisonnement quel que soit le niveau de risque de l'actif détenu, action, obligation, part de société non cotée, crédit bancaire etc.). C'est la raison pour laquelle on l'appelle en anglais « *risk neutral probability* », ou probabilité relative à un marché dans lequel le risque est comme neutralisé.

Adoptons un autre point de vue, celui de la psychologie du risque. Puisque l'espérance de la rentabilité future de tout actif risqué calculée avec la nouvelle probabilité est celle du taux sans risque, on considère (et on dit) que *tout se passe comme si* ce monde dual était habité par des agents n'ayant plus aucune appréhension vis-à-vis du risque (« *risk aversion* »), et devenus de ce fait indifférents à la prise du risque (« *risk neutral* »). La neutralisation du risque dans l'écriture de la nouvelle probabilité correspond à la neutralité des agents vis-à-vis du risque financier. Comme les primes de risque reflètent les attitudes subjectives des agents face à l'incertitude des cours futurs, et que la seconde quantification transfère cette attitude subjective dans les nouvelles valeurs de la probabilité modifiée, cette nouvelle probabilité exprime les attentes subjectives des agents dans le sens de leur croyance collective, d'où sa dénomination de « probabilité subjective ».

Découverte de la probabilité duale

Quiconque a eu à enseigner en cours de finance la formation et l'émergence de cet objet mathématique, a pu éprouver la surprise intellectuelle qui dût vraisemblablement être celle de Ross et de ses successeurs lorsqu'ils se trouvèrent devant l'apparition de cette quantité qui surgissait au détour des équations. Mais, une fois comprise cette quantité comme une nouvelle probabilité, qu'il restait encore à interpréter, la voie devenait grande ouverte pour récrire complètement les mécanismes de marché en transposant toutes les relations écrites avec des primes de risques dans le marché « réel » (la probabilité (P) du monde du phénomène) en relations sans primes de risque dans le monde dual que cette nouvelle probabilité (Q) décrivait.

On se retrouve ici à nouveau avec un exemple de développement endogène des mathématiques qui produisent un nouvel objet non encore pourvu de signification financière. En cela, la seconde quantification suit un chemin analogue à la première puisque, comme dans le cas du bêta qui sera à l'origine de nouvelles méthodes de gestion financière, c'est aussi une surprise mathématique qui provoquera le développement de la nouvelle technologie financière reposant sur la mathématisation de l'arbitrage.

Intérêt de la probabilité duale

Il est toujours possible de transformer mathématiquement une équation d'évaluation financière pour faire apparaître au numérateur ce qui était auparavant au dénominateur, mais cette opération de retraitement ne crée pas pour autant une nouvelle probabilité, c'est-à-dire une quantité dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. La seconde quantification a montré que cette transformation mathématique n'était pertinente que lorsque le marché était arbitré. Dans ce cas seulement, ce nouvel objet mathématique étrange qui apparaissait prenait les valeurs d'une probabilité tandis que, dans le cas contraire, les valeurs de cet objet mathématique étaient inférieures à 0 ou supérieures à 1. Dans un marché arbitré, cette nouvelle probabilité était unique. C'est l'unicité de cette nouvelle probabilité qui rend féconde la seconde quantification.

La condition d'absence d'arbitrage

A partir des années 1980, il s'est agi de « forcer » l'existence de cette nouvelle probabilité pour s'assurer que le marché était arbitré, avec les contraintes pratiques sur les cours des actifs qui permettaient aux valeurs de cette nouvelle quantité de rester comprises entre 0 et 1. En arbitrant le marché à partir de leur salle de marché, les opérateurs financiers *créaient* la nouvelle probabilité puisque leur arbitrage permettait aux valeurs de cette quantité de rester dans l'intervalle (0,1). Et réciproquement, la fixation de l'intervalle (0,1) sur cette quantité indiquait quels pouvaient être les prix admissibles des actifs qui vidaient le marché de tout arbitrage qui aurait permis d'obtenir un gain sans prise de risque.

La condition d'absence d'arbitrage (« *Absence of Opportunity of Arbitrage* ») devenait ainsi la condition d'existence de la nouvelle probabilité et réciproquement. La seconde quantification de la théorie financière résulta donc de la compréhension profonde de la relation entre marché arbitré et unicité de la nouvelle probabilité.

Le fonctionnement de la seconde quantification

Comme pour la première quantification, nous présentons la seconde quantification à partir du même exemple élémentaire qui permet d'en saisir la surprenante nouveauté. Dans les deux cas, il s'agit du même objectif, modéliser l'efficacité informationnelle d'un marché.

Détermination de la relation entre le présent et le futur : une société

Imaginons que les investisseurs soient indifférents au risque, et ne demandent pas, pour cette raison, de prime de risque pour leur placement. Dans ce cas, le taux des placements non risqués (2%) devient le taux de rentabilité utilisé dans les calculs de valeur actuelle. Mais comme le cours de 150 euros (ou la valeur de 150 euros si la société n'est pas cotée) existe et qu'il n'est pas possible de le changer, il faut bien trouver une manière de corriger la relation ci-dessus afin que l'on retrouve bien 150 euros avec un taux sans prime de risque. On voit que la seule manière de procéder est de modifier les valeurs de la probabilité utilisée (P).

Demandons-nous alors quelle seraient les valeurs de cette nouvelle probabilité qui permettraient de retrouver 150 euros avec un taux de 2%. Cette question, complexe dans le monde réel des marchés, est simple dans notre exemple : il suffit de résoudre une équation dans laquelle les valeurs de cette nouvelle probabilité sont l'inconnue. C'est-à-dire :

$$150 = \frac{140 \times \text{probabilité du scénario pessimiste} + 200 \times \text{probabilité du scénario optimiste}}{1 + 0,02}$$

Sachant que la somme des deux probabilités des scénarios doit nécessairement être égale à 1, on trouve les valeurs suivantes :

$$150 = \frac{140 \times 0,78 + 200 \times 0,22}{1 + 0,02}$$

Cette nouvelle probabilité qui pondère les scénarios économiques par les valeurs 0,78 et 0,22 est la nouvelle probabilité recherchée, notée Q_A . Ici, cette probabilité dépend de la société A, dans la mesure où ses valeurs sont extraites du marché calé sur le cours coté (ou la valeur) de la société A. pour cette raison, notons-la en l'indexant par A : Q_A . De la même manière que précédemment, une autre lecture de la fraction ci-dessus est possible en l'écrivant linéairement avec le facteur d'actualisation $1/1,02 = 0,9804$:

$$150 = 0,9804 \times (140 \times 0,78 + 200 \times 0,22)$$

Le taux de rentabilité espérée avec cette nouvelle probabilité est le taux des placements non risqués, alors que la détention de la société A est risquée. La prime de risque n'a pas disparu, elle est logée

dans une autre quantité que le taux d'actualisation : les valeurs de la nouvelle probabilité.

En se représentant l'évaluation financière comme un rapport entre un numérateur qui quantifie des flux futurs espérés et un dénominateur qui quantifie un rabai du futur au présent par un taux d'actualisation, la seconde quantification peut être comprise simplement comme un passage du dénominateur (primes de risque des titres par leur bêta) au numérateur (probabilité modifiée). Dans la seconde quantification, les primes de risques – qui sont fonctions du bêta dans la première quantification, disparaissent toutes des équations d'évaluation. En d'autres termes, quel que soit le titre considéré (action, obligation, part de société non cotée etc.), son taux d'actualisation sera celui d'un placement non risqué.

Détermination de la relation entre le présent et le futur : plusieurs sociétés ou « le marché »

Le raisonnement qui vient d'être fait peut se développer sur toute autre société ou tout autre actif. Chaque actif fait émerger de nouvelles valeurs de la probabilité (Q). Mais l'intérêt de la seconde quantification ne vient pas d'une simple transformation de la probabilité du phénomène (P) en probabilité duale (Q) pour chaque titre. Dans ce cas, il y aurait autant de probabilités duales (Q) que d'actifs et l'avantage d'avoir remplacé le bêta des titres par leur probabilité duale n'apparaîtrait pas. L'intérêt de la seconde quantification vient de ce que, lorsque le marché est arbitré, la nouvelle probabilité (Q) est unique : la même pour tous les agents et pour tous les titres. Les croyances collectives se coordonnent et se calent sur un cours futur attendu. La nouvelle probabilité (Q) extrait du marché sa « vérité ».

Nous montrons ceci avec l'exemple élémentaire que nous utilisons. Dans le monde dual (Q), la relation sur la société B devient :

$$66 = \frac{50 \times 0,75 + 120 \times 0,25}{1 + 0,02}$$

Le calcul fait avec la société B conduit à d'autres valeurs de la nouvelle probabilité (Q) : 0,75 (cas pessimiste) et 0,25 (cas optimiste).

Cours coté		Q (pessimiste)	Q (optimiste)
150	Probabilité Q extraite du cours de l'actif A	0,78	0,22
66	Probabilité Q extraite du cours de l'actif B	0,75	0,25

Tableau 3. Seconde quantification : les différentes probabilités Q dans un marché non arbitré

On vérifie que les valeurs de la nouvelle probabilité obtenues avec le cours de B sont différentes des valeurs obtenues avec le cours de A. Pourtant, dans un marché arbitré, avec le nouveau cours de la société B, la probabilité subjective (Q) prend les mêmes valeurs pour A que pour B. En effet, avec le cours arbitré de B, dans le monde dual (Q), la valeur actuelle devient :

$$63,89 = \frac{50 \times 0,78 + 120 \times 0,22}{1 + 0,02}$$

Le calcul fait avec la société B conduit aux valeurs de la nouvelle probabilité (Q) que les valeurs obtenues avec A : 0,78 (cas pessimiste) et 0,22 (cas optimiste). Dans un marché arbitré (efficacité informationnelle à l'équilibre), la probabilité subjective (Q) est unique.

Cours coté		Q (pessimiste)	Q (optimiste)
150	Probabilité Q extraite du cours de l'actif A	0,78	0,22
63,89	Probabilité Q extraite du cours de l'actif B	0,78	0,22

Tableau 4. Seconde quantification : l'unicité de la probabilité Q après arbitrage

Le système de prix arbitré s'écrit, dans la seconde quantification :

$$\begin{cases} 150 = 140 \times 0,9804 \times 0,78 + 200 \times 0,9804 \times 0,22 \\ 63,89 = 50 \times 0,9804 \times 0,78 + 120 \times 0,9804 \times 0,22 \end{cases}$$

Correspondance entre les deux quantifications

Si les deux quantifications portent sur le même marché, on peut établir la correspondance entre l'une et l'autre représentation. Curieusement, cette démarche ne semble pas avoir été explicitée dans les différents manuels de finance. Au moyen de l'exemple simple que nous avons choisi pour ses qualités pédagogiques, nous présentons dans le tableau ci-dessous cette correspondance. En bleu figurent les valeurs numériques de la première quantification, en rouge celles de la seconde. On vérifie que les calculs d'espérance mathématique avec la probabilité duale (Q) conduisent à retrouver, quelle que soit la rentabilité espérée des actifs dans la première quantification (13,33% et 33,04% pour A et B ; 18,60% pour le CAC2), la valeur du taux sans risque de 2%.

Du point de vue des équations du marché arbitré à l'équilibre, on peut comparer l'équilibre du marché s'écrit dans la première quantification :

$$\begin{cases} 150 = 140 \times 0,8824 \times 0,50 + 200 \times 0,8824 \times 0,50 \\ 63,89 = 50 \times 0,7517 \times 0,50 + 120 \times 0,7517 \times 0,50 \end{cases}$$

à son écriture dans la seconde :

$$\begin{cases} 150 = 140 \times 0,9804 \times 0,78 + 200 \times 0,9804 \times 0,22 \\ 63,89 = 50 \times 0,9804 \times 0,78 + 120 \times 0,9804 \times 0,22 \end{cases}$$

Comme l'observe Pliska dans son manuel de 1997, *Introduction to Mathematical Finance*, les enseignements de finance et les manuels de cours

sont datables en fonction de leur formalisme, selon qu'ils utilisent ou non la seconde quantification dans la présentation de la théorie financière.

La valeur actuelle d'une quantification à l'autre

Après avoir présenté les deux quantifications et le passage d'une quantification à l'autre, nous allons maintenant montrer comment le changement de quantification s'est traduit sur les outils de la finance avec l'exemple de l'actualisation, technique de base de la finance pratique comme théorique. Nous n'avons pas l'intention ici d'entrer dans l'histoire de la technique d'actualisation, mais seulement d'examiner comment les deux quantifications transforment le calcul de la valeur actuelle en se juxtaposant sur la formule initiale et en l'hybridant par les probabilités historique (P) puis duale (Q).

La valeur actuelle avant la première quantification

Le principe du calcul de la valeur actuelle est de rabattre les valeurs futures sur le présent, au moyen d'un coefficient approprié qui permet le passage du futur au présent :

$$\text{Valeur actuelle} = \text{valeur future actualisée (1)}$$

Ceci pour chaque échéance future. Dans la représentation de Fisher (1906) puis de Keynes, il y a plusieurs valeurs futures qui sont les flux de revenus que l'on peut attendre de l'investissement, et la formule ci-dessus s'écrit en toute généralité :

$$\text{Valeur actuelle} = \text{somme des flux futurs actualisés (2)}$$

Tableau 5. Correspondance entre les deux quantifications

Equilibre du marché arbitré en date 0

Monde dual

date 0		date 1 état b	date 1 état h	E_P	volatilité	prime risque	E_Q
1	Monétaire	1,02	1,02				
150	A	140	200				
63,89	B	50	120				
probabilité	P	0,50	0,50	la plus vraisemblable			
probabilité	Q	0,78	0,22	extraite du marché arbitré			
Représentation de MARKOWITZ	RA	-6,67%	33,33%	13,33%	20,00%	11,33%	2,00%
	RB	-21,74%	87,83%	33,04%	54,78%	31,04%	2,00%
CAPM de SHARPE	RM	-10,70%	47,91%	18,60%	25,38%	16,60%	2,00%

L'élément déterminant pour le calcul d'une valeur actuelle est le coefficient qui rabat le futur sur le présent, appelé facteur d'actualisation :

$$\text{Valeur actuelle} = \text{facteur d'actualisation} \times \text{valeur future} \quad (3)$$

Ce facteur doit exprimer le passage du temps. L'inverse de ce facteur est le taux d'actualisation : le taux qui rabat le futur sur le présent.

$$\text{facteur d'actualisation} = \frac{1}{1 + \text{taux d'actualisation}}$$

A un niveau très général, le taux d'actualisation est lié au risque de l'investissement. C'est par ce lien que les deux quantifications vont entrer dans le calcul de la valeur actuelle.

La valeur actuelle dans la première quantification

Avant la première quantification, les flux futurs et le taux sont supposés donnés ou posés comme connus (non entachés d'incertitude). Mais les valeurs futures sont toujours entachées d'incertitude et les flux futurs sont (des variables) aléatoires (« *random cash flows* »). Par exemple en assurance-vie, les flux peuvent représenter des revenus de contrats d'épargne ; en assurance dommages, les flux peuvent représenter des dépenses médicales.

Avec la première quantification, le critère espérance-variance entre dans l'actualisation. Les flux futurs sont espérés (espérance mathématique) et ils sont risqués (volatilité). Le facteur d'actualisation et la rentabilité espérée sont obtenus avec le CAPM :

$$\text{Valeur actuelle} = \text{facteur d'actualisation CAPM} \times \text{valeur future espérée} \quad (4)$$

$$\text{Taux d'actualisation pour un titre} = \text{rentabilité CAPM espérée de ce titre} \quad (5)$$

Dans la première quantification, l'incertitude sur le futur s'exprime par la dispersion des valeurs possibles de cours futurs, appelé volatilité de l'investissement. Avec cette réduction, une partie du taux d'actualisation contient une rémunération pour cette dispersion, appelée la prime de risque du titre. Plus la volatilité est élevée, et plus le taux sera élevé.

$$\text{Rentabilité espérée d'un titre} = \text{taux sans risque} + \text{prime de risque espérée du titre} \quad (6)$$

La prime de risque espérée d'un titre (ou du marché) est le supplément de rentabilité que procure la détention de ce titre (ou de l'indice de marché) par rapport à la rentabilité d'un placement non risqué (on dit par abus de langage « taux sans risque ») comme celui d'un compte de caisse d'épargne ou d'un bon du Trésor. Dans ce dernier cas, les valeurs futures sont certaines.

D'où :

$$\text{facteur d'actualisation} = \frac{1}{1 + \text{taux sans risque} + \text{prime de risque espérée}}$$

L'évaluation financière fait intervenir une croyance collective sur le risque. Dans la représentation de Sharpe (1964), le bêta permet le calcul direct de la prime de risque d'un titre par rapport à celle du marché : la prime de risque du titre est avec celle du marché dans un rapport de proportionnalité chiffré par le coefficient bêta. Dans l'hypothèse où ils adoptent la quantification du bêta, les attentes subjectives des acheteurs d'un titre seront donc exprimées en taux de rentabilité espéré dont l'ingrédient principal est le bêta du titre par rapport au marché :

$$\text{Prime de risque espérée d'un titre} = \text{bêta du titre} \times \text{prime de risque espérée du marché} \quad (7)$$

L'application du CAPM dans les calculs de valeur actuelle s'ensuit :

$$\text{facteur d'actualisation} = \frac{1}{1 + \text{taux sans risque} + \text{bêta du titre} \times \text{prime de risque espérée du marché}}$$

La mise en œuvre de la première quantification nécessite de disposer du bêta du titre et de la prime de risque du « marché ». C'est-à-dire un indice représentatif du « marché ».

La valeur actuelle dans la seconde quantification

Dans le calcul de valeur actuelle donné par la relation rappelée ci-dessous, le facteur d'actualisation des flux inclut, *via* le CAPM, la rémunération du niveau de risque du titre.

$$\text{Valeur actuelle d'un flux futur espéré} = \text{facteur d'actualisation} \times \text{flux futur espéré} \quad (8)$$

Mais ce facteur reste une quantité exogène, c'est-à-dire une « donnée » utilisée telle quelle dans l'analyse financière classique. L'incertitude, probabilisée par la première quantification, ne porte que sur les flux, qui sont des flux espérés au sens

de l'espérance mathématique. Le facteur d'actualisation n'est pas aléatoire. Dans la seconde quantification, ce facteur devient aléatoire et un dialogue s'instaure avec la théorie de l'équilibre général en économie.

Le noyau de l'évaluation par le marché

L'idée de LeRoy (1973) puis de Lucas (1978) fut de généraliser la relation de valeur actuelle en considérant ce facteur d'actualisation comme une variable aléatoire prenant différentes valeurs selon les états du marché. Dans ce cas, le facteur d'actualisation, et donc l'actualisation elle-même, devient aléatoire. L'incertitude et sa probabilisation enveloppent alors non seulement les flux futurs mais aussi le facteur d'actualisation et l'espérance mathématique s'applique sur le produit des deux. Comparons les deux relations, avant (9) et après (10) l'innovation de Lucas :

Valeur actuelle d'un flux futur espéré = facteur d'actualisation x espérance de [flux futur] (9)

Valeur actuelle d'un flux futur espéré = espérance de [facteur d'actualisation x flux futur] (10)

La relation (10) est l'équation de Lucas. C'est l'équation fondamentale d'évaluation des titres dans un marché à l'équilibre. Cette équation de Lucas établit la jonction entre l'évaluation financière classique d'une société et un modèle d'équilibre général en économie avec investisseur représentatif : le facteur d'actualisation aléatoire est égal au rapport des utilités marginales de la consommation agrégée entre le présent coté et le futur attendu.

Les mathématiciens de la finance dénomment ce facteur d'actualisation aléatoire le « noyau d'évaluation par le marché » (« *Market Pricing Kernel* »). A la suite de Duffie (1996) ou Bühlmann *et al.* (1998), les actuaires le qualifient de « déflateur » dans les travaux d'application actuarielle.

Dialogue avec la théorie de l'équilibre général

La relation avec le modèle d'équilibre général d'Arrow et Debreu est la suivante. En considérant que les états du marché sont les « états du monde » dans le sens du modèle d'équilibre général d'Arrow et Debreu, la valeur du facteur d'actualisation selon les différents états du marché correspond au prix de l'actif élémentaire d'Arrow-Debreu quantifiant cet état, ajusté par la probabilité de l'état correspondant. Ainsi les économistes appellent ce facteur la « densité des prix d'états ».

La décomposition du facteur d'actualisation aléatoire en facteurs premiers (on parle d'« actifs premiers » pour décrire les actifs d'Arrow-Debreu) est à la racine de la théorie de l'évaluation par arbitrage (« *Arbitrage Pricing Theory* », APT) de Ross (1976) qui déploie sur des axes élémentaires (les « facteurs » de prix du marché) les prix de tous les actifs réels. Il ne reste plus qu'à interpréter différemment les valeurs du noyau pour comprendre que, dans un marché arbitré, une autre écriture des relations d'équilibre entre actifs financiers est possible. Ce fut la percée des années 1980.

L'intuition fondamentale qu'ont eue en 1979 et 1981 Harrison, Kreps et Pliska, a consisté à réinterpréter les prix des états du monde d'Arrow et Debreu comme des valeurs d'une probabilité particulière lorsque le marché était arbitré. Il s'agit d'une interprétation mathématique : les valeurs de cette nouvelle « probabilité » (Q) ne sont rien d'autres que des prix d'Arrow-Debreu cohérents avec le marché et normalisés pour que leur somme soit égale à 1 (ce qui constitue donc une probabilité). C'est la raison pour laquelle les professionnels parlent parfois de cette « probabilité » en la dénommant « probabilité des affaires » (« *business probability* ») : ces valeurs correspondent à ce qui résulte des échanges effectués lorsque les acheteurs et les vendeurs se sont mis d'accord sur un prix de transaction qui leur conviennent.

Tableau 6. Le facteur d'actualisation dans la seconde quantification

Discipline concernée	Nom du facteur d'actualisation dans la seconde quantification
Finance mathématique	Noyau de l'évaluation par le marché
Théorie économique	Densité des prix des états du monde
Actuariat	Déflateur

En un sens, cette « probabilité » est une probabilité de prix de transaction, la mesure qui extrait des échanges les valeurs théoriques de l'équilibre général d'Arrow-Debreu une fois le marché stabilisé à l'issue de la transaction. Comme si l'on disait : à présent que les échanges ont eu lieu, que le marché est à l'équilibre, quels seraient, dans la représentation de l'équilibre général, les prix d'Arrow-Debreu correspondant à cet équilibre.

Si Debreu (1959) avait conçu son modèle d'équilibre général comme une abstraction formelle dénuée de toute idée d'applicabilité dans le « vrai monde » en n'imaginant pas qu'il en pût être autrement, la mathématisation de la finance des années 1980, ce que nous appelons la seconde quantification de la théorie financière, a fait passer cette abstraction dans la pratique professionnelle quotidienne des financiers. Chaque jour, les marchés concrets achètent et vendent des prix d'Arrow-Debreu dans les transactions effectuées à base d'évaluation en probabilité duale (Q).

La nouvelle formule de la valeur actuelle

Dans la seconde quantification, l'espérance mathématique est calculée avec la nouvelle probabilité (Q). Pour signifier que l'espérance mathématique est calculée avec l'une ou l'autre probabilité (P) ou (Q), on place un indice supérieur sur le symbole mathématique de l'espérance : espérance^P pour un calcul avec la probabilité P, espérance^Q pour un calcul avec la probabilité Q. Avec cette écriture, le calcul de la valeur actuelle avec le déflateur (facteur d'actualisation aléatoire) est :

$$\text{Valeur actuelle d'un flux futur espéré} = \text{espérance}^P \text{ de [déflateur} \times \text{flux futur]} \quad (12)$$

En utilisant la nouvelle probabilité (Q), le taux d'actualisation au dénominateur n'inclut pas de prime de risque : c'est le « taux sans risque ». Le facteur d'actualisation de la valeur actuelle dans la seconde quantification avec la probabilité Q est alors :

$$\text{facteur d'actualisation} = \frac{1}{1 + \text{taux sans risque}}$$

On peut comprendre ce facteur d'actualisation élémentaire comme la valeur actuelle d'un flux dont la valeur future serait exactement 1, représentant un titre particulier. Ces titres existent sur le marché, et sont appelés des obligations à coupon nul (« coupon zéro »). Le facteur d'actualisation

dans la seconde quantification avec la probabilité duale (Q) est donc exactement le prix d'un coupon zéro sans risque. La nouvelle formule de la valeur actuelle est :

$$\text{Valeur actuelle d'un flux futur espéré} = \text{espérance}^Q \text{ de [prix coupon zéro sans risque} \times \text{flux futur]} \quad (11)$$

Par exemple, dans la directive « Solvabilité II », il est précisé que « la valeur actuelle attendue [du montant à actualiser] est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente ». Cette méthode détermine la valeur d'un flux *comme si* les agents vivaient dans un monde sans risque, dans lequel aucun investisseur ne demanderait une prime de risque, et donc dans lequel tout rendement de tout actif risqué serait égal au taux sans risque. Quoique les flux modifiés (avec la nouvelle probabilité) n'aient pas de signification réelle dans le « vrai » monde, du point de vue de leur nouvelle valeur moyenne (car dans le monde réel, les investisseurs ne sont pas indifférents au risque et demandent une prime de risque), la combinaison avec l'actualisation au taux sans risque produit un résultat qui est valide dans le « vrai » monde. La raison en est que le passage d'un univers risque neutre à un univers réel produit simultanément deux changements, sur l'espérance des flux et sur le taux d'actualisation, et que ces deux changements se compensent toujours exactement.

La différence entre les deux calculs de valeur actuelle selon les deux quantifications apparaît. Avant la seconde quantification, dans l'évaluation dite « fondamentale » des actifs financiers, deux analystes financiers professionnels utilisant la même méthodologie et les mêmes données économiques parvenaient à deux valeurs actuelles différentes. Après la seconde quantification, l'utilisation de la même méthodologie et des mêmes données conduit à la même valeur actuelle. L'art de l'analyste financier professionnel qui le conduisait à une conclusion sur la valeur différente de celle de ses confrères est remplacé par le « marché arbitré » qui unifie les opinions des analystes sur une seule valeur actuelle unique, le prix de marché.

La seconde quantification a donc modifié significativement l'opération d'actualisation, alors même que la première n'avait pas eu d'impact important sur les pratiques des professionnels.

Tableau 7. Le calcul de la valeur actuelle d'une quantification à l'autre

Calcul de la valeur actuelle	Facteur d'actualisation
Avant la première quantification	Déterministe fixe
Première quantification	Déterministe variable non aléatoire
Seconde quantification	Aléatoire

La valeur actuelle dans la longue durée de la quantification

Pour terminer, si nous plaçons le choix du taux d'actualisation dans une perspective de longue durée sur les calculs financiers, nous nous apercevons que trois périodes distinctes se succèdent dans les calculs de valeur actuelle. Une première période utilise un taux d'actualisation donné arbitraire, comme dans les approches classiques de Fisher ou Keynes. Dans cette première période, le risque financier est pris en compte mais n'est pas probabilisé. Le taux d'actualisation inclut bien une prime de risque mais sans modélisation particulière. La seconde période est celle dans laquelle le taux d'actualisation provient d'un modèle d'équilibre de marché construit à partir de la théorie du portefeuille de Markowitz et Sharpe. Dans cette seconde période, la prime de risque résulte de ce modèle et le taux d'actualisation intègre donc une modélisation du risque probabilisé par l'analyse moyenne-variance de la théorie du portefeuille. Dans la troisième période, la mathématisation de l'arbitrage par Harrison, Kreps et Pliska transforme à nouveau le calcul de la valeur actuelle en calant sur le marché l'actualisation des flux futurs. Dans cette période, la valeur actuelle de tout « objet » financier (actif comme passif) devient cohérente avec le marché arbitré, et cette cohérence assure au prix de marché une valeur déterminante qui sera utilisée comme référence pour la comptabilité (norme IAS 39) et pour l'évaluation

prudentielle des bilans bancaires ou des entreprises d'assurance.

Dans un travail parallèle qui utilise une analyse conventionnaliste (Chiapello et Walter, 2015), nous avons proposé de considérer ces trois périodes comme trois conventions de quantification en finance, qui structurent à la fois les savoirs théoriques, les pratiques professionnelles et les normes réglementaires financières. De point de vue, les deux quantifications successives de la théorie financière et les transformations qu'elles impliquent s'inscrivent dans une longue durée de la transformation des calculs financiers et dans le processus de financiarisation de l'économie que nous évoquons dans l'introduction.

Conclusion

Cet article présente les deux quantifications de la théorie financière en insistant sur la manière dont la seconde quantification retraite différemment les quantités que la première quantification avait modélisées et sur les transformations que ce retraitement introduit dans les pratiques professionnelles, en prenant comme exemple canonique le calcul usuel de la valeur actuelle.

La première quantification correspond à la probabilisation massive des techniques et méthodes de la finance usuelle dans les années 1950, au moyen de l'introduction généralisée, dans ces méthodes, de l'analyse espérance-variance mise au point par Harry Markowitz dans le cadre de

Tableau 8. Le taux d'actualisation et la prime de risque d'avant la première quantification à la seconde quantification

Auteurs des travaux principaux	Dates des publications	Rentabilité attendue par les agents devant le risque	Probabilité utilisée dans le calcul de risque
Fisher, Keynes	1906-1921	Taux fixe donné sans modèle	N.S.
Fama, Samuelson, Jensen	1965-1978	Taux fixe donné par le CAPM	P (« historique »)
Harrison, Kreps, Pliska	1979-1981	Taux des placements sans risque	Q (« duale »)

la théorie nouvelle des choix de portefeuilles (1952, 1959). Cette première quantification se déploie dans les années 1960 et conduit simultanément à l'élaboration de la théorie de l'efficacité informationnelle d'un marché par Eugene Fama (1970-1976), à la construction du modèle d'équilibre des actifs financiers de William Sharpe (1964) et à la théorie de l'évaluation des instruments dérivés (« options ») de Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton dont la forme première et presque définitive apparaît en 1973. La base de la probabilisation est une probabilité appelée « historique » qui représente les aléas des phénomènes financiers, tels que la statistique peut les estimer à partir de séries chronologiques passées. Les équations de Black-Scholes et Merton (1973) contiennent une intuition non triviale présente dans la première quantification mais qui ne va être pleinement explicitée qu'ensuite : le taux de rendement des actifs risqués apparaît comme étant celui des placements non risqués. La pleine prise en considération des implications de ce résultat conduit à la seconde quantification des années 1980, ouverte par Michael Harrison, David Kreps et Stanley Pliska.

La seconde quantification de la théorie financière correspond au changement de la probabilité utilisée dans les modélisations mathématiques de la finance. On passe de la probabilité « historique » de la première quantification à une probabilité « subjective » d'un monde dual au phénomène financier, avec laquelle tous les taux de rentabilité espérés des actifs risqués s'aplatissent en taux des placements sans risque. Cette probabilité très particulière est extraite des prix du marché une fois celui-ci arbitré par l'action des agents en fonction des croyances qu'ils ont à l'esprit (d'où la terminologie de « subjective »). A l'instar des nombres imaginaires (ou complexes) en mathématiques qui permettent d'opérer dans un monde dual avant de revenir dans le monde réel comme par exemple la transformation de Fourier, la seconde quantification revient à transposer dans un monde dual imaginaire les opérations financières du monde réel, à effectuer tous les calculs dans ce monde imaginaire, puis à repasser ensuite dans le monde réel pour les décisions financières.

C'est toujours le même marché qui se trouve devant le modélisateur, mais le regard porté sur le marché n'est plus le même. Dans la première quantification, la probabilité est issue d'une estimation statistique des variations passées. Dans la

seconde quantification, la probabilité est extraite des prix arbitrés. La première quantification regarde le passé du marché, la seconde calibre son futur. Ce n'est donc pas un hasard si, pour transformer les marchés réels dans le but de les faire tendre vers des marchés théoriques arbitrés, le régulateur utilise des outils de gestion construits avec la seconde quantification. L'instrument implique et progressivement réalise (« rend réel ») un monde nouveau, en l'occurrence le monde de la seconde quantification de la théorie financière.

La seconde quantification est à l'origine d'un bouleversement considérable des manières de penser la finance et d'agir concrètement sur les marchés financiers. La totalité des techniques et des méthodes de la finance pratique se trouve touchée par la seconde quantification, qui pénètre finalement l'espace réglementaire international dans les années 2000 à travers les normes prudentielles comme par exemple la directive « Solvabilité II ». Des pans entiers de l'activité financière jusqu'alors restés à l'abri de la financiarisation mathématisée comme le secteur de l'assurance et des mutuelles, se trouvent tout à coup plongés dans un univers mathématique qui impose sa représentation du monde aux professionnels, dont la seule issue est de modifier les systèmes de gestion pour les mettre en phase avec le corpus technico-scientifique de la seconde quantification.

Deux prolongements de cet article sont à envisager. La manière dont la seconde quantification va modifier les pratiques professionnelles des métiers de l'assurance en entraînant une « seconde financiarisation » de ces métiers, que la directive « Solvabilité II » inscrit dans les textes réglementaires; ainsi que la manière dont la seconde quantification conduira le régulateur à chercher à faire tendre les marchés réels vers le marché théorique arbitré en utilisant la convention d'efficacité informationnelle dans les normes financières internationales. Ces deux prolongements feront l'objet d'un travail ultérieur.

Enfin, du point de vue de l'éthique de la finance, on aperçoit comment les structures mathématiques des modélisations financières conduisent à des changements importants des métiers financiers et de l'environnement professionnel. Ce qui soulève une double question. D'une part, peut-on promouvoir une convention de quantification sans tenir compte de son degré de corroboration avec le phénomène observé ou de son effet performatif sur le phénomène lui-même. Ici,

l'éthique financière devrait inclure les croyances collectives de la modélisation financière mathématique (Walter, 2008). D'autre part, que penser de l'acceptation institutionnelle de ces croyances même si l'on estime qu'elles ne sont pas fondées, ce qui pose le problème du rapport institutionnel à l'erreur (Picavet, 2009). Ici, l'éthique financière devrait inclure la question de la régulation financière en étendant la notion de responsabilité sociale des entreprises ou des investissements, à la responsabilité sociale des régulateurs.

Autrement dit, si une institution financière ou réglementaire appuie son action sur des hypothèses mathématiques concernant la nature du risque financier, il importe de savoir si ces hypothèses sont pertinentes (aspect cognitif) et s'il est raisonnable de les accepter (aspect sociologique). Ce qui pose pour finir la question de l'éthique de la modélisation financière et du rôle des mathématiques dans la crise financière de 2008, appelant à une appréciation de ce rôle dans l'élaboration d'une éthique financière générale.

Références bibliographiques

- Armatte M. (2010), *La science économique comme ingénierie. Quantification et modélisation*, Paris, Presses de l'Ecole des Mines.
- Ayache E. (2010), *The Blank Swan: The End of Probability*, John Wiley & sons.
- Black F., Scholes M. (1973), "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, vol. 81, n°3, p. 637-659.
- Chiapello E. (2015), « Financialization of Valuation », *Human Studies*, à paraître.
- Chiapello E., Walter C. (2015), "The three ages of financial quantification: a conventionalist approach of the financier's metrology", Working paper.
- de Bruin B. (2015), *Ethics and the Global Financial Crisis: Why Incompetence is Worse than Greed (Business, Value Creation, and Society)*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Debreu G. (1959), *Theory of value*, New York, Wiley & sons.
- Desrosières A. (2000), *Pour une sociologie historique de la quantification. L'argument statistique I*, Paris, Presses de l'Ecole des Mines.
- Desrosières A. (2003), "Historiciser l'action publique : l'Etat, le marché et les statistiques", dans P. Laborier et D. Trom (eds.), *Historicités de l'action publique*, Paris, PUF, et "Managing the economy", in T. Porter, D. Ross (eds.) *The modern social sciences*, The Cambridge History of Science, vol. 7, Cambridge, Cambridge University Press.
- Dahan A., Pestre D. (eds.) (2004), *Les sciences pour la guerre, 1940-1960*, Presses de l'EHESS, Paris.
- Duffie D. (1996), *Dynamic Asset Pricing Theory*, (2nd ed.), Princeton, Princeton University Press.
- Fama E. (1970), "Efficient capital markets : a review of theory and empirical work", *Journal of Finance*, vol. 25, p. 383-417 et discussion pp. 418-423.
- Fama E. (1976), "Reply", *Journal of finance*, vol. 31, p. 143-145.
- Harrison M., Kreps D. (1979), « Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets », *Journal of Economic Theory*, vol. 20, p. 381-408.
- Harrison M., Pliska S. (1981), « Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading », *Stochastic Processes and Applications*, vol. 11, p. 215-260.
- LeRoy S. (1973), "Risk Aversion and the Martingale Property of Stock Prices", *International Economic Review*, vol. 14, p. 436-446.
- Lucas R. (1978), "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica*, vol. 46, p. 1429-1445.
- Markowitz H. (1952), « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, vol. 7, n°1, p. 77-91.
- Markowitz H. (1959), *Portfolio Selection : efficient Diversification of Investment*, New Haven, Yale University Press (2nd éd. 1971).
- Markowitz H. (1992), « Discours d'introduction à la journée d'étude organisée par la Société de statistique de Paris sur le thème des marchés financiers et de la gestion de portefeuille le 26 mars 1992 », *Journal de la société statistique de Paris*, vol. 133, n°4, p. 13-33.
- Merton R. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, n°1, p. 141-183.
- Muniesa F. (2014), *The Provoked Economy. Economic reality and the performative turn*, Londres, Routledge.

Picavet E. (2009), "Sur l'acceptation institutionnelle des propositions qui paraissent fausses", in Chauviré C., Ogien A., Quéré L., *Dynamiques de l'erreur*, Paris, Editions de l'EHESS, p. 309-334.

Pradier P.-C. (2000), « Le hasard fait bien les choses : histoire du docteur Markowitz », Économie et Sociétés. *Cahier de l'ISMEA*, série PE, n°1.

Ross S. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, vol. 13, p. 341-360.

Sharpe W. (1963), "A simplified model for portfolio analysis", *Management science*, vol. 9, n°2, p. 277-293.

Sharpe W. (1964), "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of finance*, vol. 19, p. 425-442.

Tobin J. (1958), "Liquidity preference as behaviour toward risk", *Review of Economic Studies*, vol. 25, p. 65-86.

Walter C. (1996), « Une histoire du concept d'efficience sur les marchés financiers », *Annales. Histoire Sciences Sociales*, n°4, juillet-août, p. 873-905.

Walter C. (1999), « Aux origines de la mesure de performance des fonds d'investissement : les travaux d'Alfred Cowles », *Histoire & Mesure*, tome 14, n°1-2, janvier, p. 163-197.

Walter C. (2002a), « Le phénomène leptokurtique sur les marchés financiers », *Finance*, tome 23, n°2, janvier, p. 15-68.

Walter C. (2002b), « La recherche de lois d'échelles sur les variations boursières », in Abry P., Gonçalves P. et Lévy Vehel J. (dir.), *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, Paris, Hermès, p. 243-72.

Walter C. (2004), « Le modèle linéaire dans la gestion des portefeuilles : une perspective historique », *Cahiers du centre d'analyse et de mathématiques sociales*, n° 242, série « Histoire du calcul des probabilités et de la statistique » n°65.

Walter C. (2008), « La représentation brownienne du risque : une faute morale collective ? », *Finance & Bien commun*, 31-32, p. 137-144.

Walter C. (2011), « Performation et surveillance du système financier », *Revue d'économie financière*, 101, p. 105-116.

Working Papers : la liste

- Hervé Le Bras, Jean-Luc Racine & Michel Wieviorka, *National Debates on Race Statistics: towards an International Comparison*, FMSH-WP-2012-01, février 2012.
- Manuel Castells, *Ni dieu ni maître : les réseaux*, FMSH-WP-2012-02, février 2012.
- François Jullien, *L'écart et l'entre. Ou comment penser l'altérité*, FMSH-WP-2012-03, février 2012.
- Itamar Rabinovich, *The Web of Relationship*, FMSH-WP-2012-04, février 2012.
- Bruno Maggi, *Interpréter l'agir : un défi théorique*, FMSH-WP-2012-05, février 2012.
- Pierre Salama, *Chine – Brésil : industrialisation et « désindustrialisation précoce »*, FMSH-WP-2012-06, mars 2012.
- Guilhem Fabre & Stéphane Grumbach, *The World upside down, China's R&D and innovation strategy*, FMSH-WP-2012-07, avril 2012.
- Joy Y. Zhang, *The De-nationalization and Re-nationalization of the Life Sciences in China: A Cosmopolitan Practicality?*, FMSH-WP-2012-08, avril 2012.
- John P. Sullivan, *From Drug Wars to Criminal Insurgency: Mexican Cartels, Criminal Enclaves and Criminal Insurgency in Mexico and Central America. Implications for Global Security*, FMSH-WP-2012-09, avril 2012.
- Marc Fleurbaey, *Economics is not what you think: A defense of the economic approach to taxation*, FMSH-WP-2012-10, may 2012.
- Marc Fleurbaey, *The Facets of Exploitation*, FMSH-WP-2012-11, may 2012.
- Jacques Sapir, *Pour l'Euro, l'heure du bilan a sonné : Quinze leçons et six conclusions*, FMSH-WP-2012-12, juin 2012.
- Rodolphe De Koninck & Jean-François Rousseau, *Pourquoi et jusqu'où la fuite en avant des agricultures sud-est asiatiques ?*, FMSH-WP-2012-13, juin 2012.
- Jacques Sapir, *Inflation monétaire ou inflation structurelle ? Un modèle hétérodoxe bi-sectoriel*, FMSH-WP-2012-14, juin 2012.
- Franson Manjali, *The 'Social' and the 'Cognitive' in Language. A Reading of Saussure, and Beyond*, FMSH-WP-2012-15, July 2012.
- Michel Wieviorka, *Du concept de sujet à celui de subjectivation/dé-subjectivation*, FMSH-WP-2012-16, juillet 2012.
- Nancy Fraser, *Feminism, Capitalism, and the Cunning of History: An Introduction*, FMSH-WP-2012-17, august 2012.
- Nancy Fraser, *Can society be commodities all the way down? Polanyian reflections on capitalist crisis*, FMSH-WP-2012-18, august 2012.
- Marc Fleurbaey & Stéphane Zuber, *Climate policies deserve a negative discount rate*, FMSH-WP-2012-19, september 2012.
- Roger Waldinger, *La politique au-delà des frontières : la sociologie politique de l'émigration*, FMSH-WP-2012-20, septembre 2012.
- Antonio De Lauri, *Inaccessible Normative Pluralism and Human Rights in Afghanistan*, FMSH-WP-2012-21, september 2012.
- Dominique Méda, *Redéfinir le progrès à la lumière de la crise écologique*, FMSH-WP-2012-22, octobre 2012.
- Ibrahima Thioub, *Stigmates et mémoires de l'esclavage en Afrique de l'Ouest : le sang et la couleur de peau comme lignes de fracture*, FMSH-WP-2012-23, octobre 2012.
- Danièle Joly, *Race, ethnicity and religion: social actors and policies*, FMSH-WP-2012-24, novembre 2012.
- Dominique Méda, *Redefining Progress in Light of the Ecological Crisis*, FMSH-WP-2012-25, décembre 2012.
- Ulrich Beck & Daniel Levy, *Cosmopolitanized Nations: Reimagining Collectivity in World Risk Society*, FMSH-WP-2013-26, february 2013.
- Xavier Richet, *L'internationalisation des firmes chinoises : croissance, motivations, stratégies*, FMSH-WP-2013-27, février 2013.
- Alain Naze, *Le féminisme critique de Pasolini, avec un commentaire de Stefania Tarantino*, FMSH-WP-2013-28, février 2013.
- Thalia Magioglou, *What is the role of "Culture" for conceptualization in Political Psychology? Presentation of a dialogical model of lay thinking in two cultural contexts*, FMSH-WP-2013-29, mars 2013.
- Byasdeb Dasgupta, *Some Aspects of External Dimensions of Indian Economy in the Age of Globalisation*, FMSH-WP-2013-30, april 2013.
- Ulrich Beck, *Risk, class, crisis, hazards and cosmopolitan solidarity/risk community – conceptual and methodological clarifications*, FMSH-WP-2013-31, april 2013.
- Immanuel Wallerstein, *Tout se transforme. Vraiment tout ?*, FMSH-WP-2013-32, mai 2013.
- Christian Walter, *Les origines du modèle de marche au hasard en finance*, FMSH-WP-2013-33, juin 2013.
- Byasdeb Dasgupta, *Financialization, Labour Market Flexibility, Global Crisis and New Imperialism – A Marxist Perspective*, FMSH-WP-2013-34, juin 2013.
- Kiyomitsu Yui, *Climate Change in Visual Communication: From 'This is Not a Pipe' to 'This is Not Fukushima'*, FMSH-WP-2013-35, juin 2013.
- Gilles Lhuillier, *Minerais de guerre. Une nouvelle théorie de la*

mondialisation du droit, FMSH-WP-2013-36, juillet 2013.

David Tyfield, *The Coal Renaissance and Cosmopolitized Low-Carbon Societies*, FMSH-WP-2013-37, juillet 2013.

Lotte Pelckmans, *Moving Memories of Slavery: how hierarchies travel among West African Migrants in Urban Contexts (Bamako, Paris)*, FMSH-WP-2013-38, juillet 2013.

Amy Dahan, *Historic Overview of Climate Framing*, FMSH-WP-2013-39, août 2013.

Rosa Rius Gatell & Stefania Taranino, *Philosophie et genre: Réflexions et questions sur la production philosophique féminine en Europe du Sud au XX^e siècle (Espagne, Italie)*, FMSH-WP-2013-40, août 2013.

Angela Axworthy *The ontological status of geometrical objects in the commentary on the Elements of Euclid of Jacques Peletier du Mans (1517-1582)*, FMSH-WP-2013-41, août 2013.

Pierre Salama, *Les économies émergentes, le plongeon ?*, FMSH-WP-2013-42, août 2013.

Alexis Nuselovici (Nouss), *L'exil comme expérience*, FMSH-WP-2013-43, septembre 2013.

Alexis Nuselovici (Nouss), *Exilience : condition et conscience*, FMSH-WP-2013-44, septembre 2013.

Alexis Nuselovici (Nouss), *Exil et post-exil*, FMSH-WP-2013-45, septembre 2013.

Alexandra Galitzine-Loumpet, *Pour une typologie des objets de l'exil*, FMSH-WP-2013-46, septembre 2013.

Hosham Dawod, *Les réactions irakiennes à la crise syrienne*, FMSH-WP-2013-47, septembre 2013.

Gianluca Manzo, *Understanding the Marriage Effect: Changes in Criminal Offending Around the Time of Marriage*, FMSH-WP-2013-48, GeWoP-1, octobre 2013.

Torkild Hovde Lyngstad & Torbjørn Skarðhamar, *Understanding*

the Marriage Effect: Changes in Criminal Offending Around the Time of Marriage, FMSH-WP-2013-49, GeWoP-2, octobre 2013.

Gunn Elisabeth Birkelund & Yannick Lemel, *Lifestyles and Social Stratification: An Explorative Study of France and Norway*, FMSH-WP-2013-50, GeWoP-3, octobre 2013.

Franck Varenne, *Chains of Reference in Computer Simulations*, FMSH-WP-2013-51, GeWoP-4, octobre 2013.

Olivier Galland & Yannick Lemel, avec la collaboration d'Alexandra Frenod, *Comment expliquer la perception des inégalités en France ?*, FMSH-WP-2013-52, GeWoP-5, octobre 2013.

Guilhem Fabre, *The Lion's share : What's behind China's economic slowdown*, FMSH-WP-2013-53, octobre 2013.

Venni V. Krishna, *Changing Social Relations between Science and Society: Contemporary Challenges*, FMSH-WP-2013-54, novembre 2013.

Isabelle Huault & Hélène Rainelli-Weiss, *Is transparency a value on OTC markets? Using displacement to escape categorization*, FMSH-WP-2014-55, janvier 2014.

Dominique Somda, *Une humble aura. Les grandes femmes au sud de Madagascar*, FMSH-WP-2014-56, janvier 2014.

Débora González Martínez, *Sur la translatio de miracles de la Vierge au Moyen Âge. Quelques notes sur les Cantigas de Santa Maria*, FMSH-WP-2014-57, janvier 2014.

Pradeep Kumar Misra, *The State of Teacher Education in France: A Critique*, FMSH-WP-2014-58, janvier 2014.

Naeem Ahmed, *Pakistan's Counter-terrorism strategy and its Implications for domestic, regional and international security*, FMSH-WP-2014-59, janvier 2014.

Anatole Fogou, *Histoire, conscience historique et devenir de l'Afrique :*

revisiter l'historiographie diopienne, FMSH-WP-2014-60, janvier 2014.

Pierre Salama, *Les classes moyennes peuvent-elles dynamiser la croissance du PIB dans les économies émergentes?*, FMSH-WP-2014-61, février 2014.

Marta Craveri & Anne-Marie Losonczy, *Growing up in the Gulag: later accounts of deportation to the USSR*, FMSH-WP-2014-62, february 2014.

Philippe Steiner, *The Organizational Gift and Sociological Approaches to Exchange*, FMSH-WP-2014-63, GeWoP-6, february 2014.

Françoise Bourdarias, Jean-Pierre Dozon & Frédéric Obringer, *La médecine chinoise au Mali. Les économies d'un patrimoine culturel*, FMSH-WP-2014-64, février 2014.

Ilan Bizberg, *The welfare state and globalization in North America*, FMSH-WP-2014-65, may 2014.

Philippe Steiner, *Cartographie des échanges*, FMSH-WP-2014-66, GeWoP-7, mai 2014.

Olga Stepanova, *Le roman, la pièce de théâtre et le film : traits communs et particularités*, FMSH-WP-2014-67, mai 2014.

Flavia Buzzetta, *Adaptations de thèmes magico-cabalistiques juifs médiévaux par le Quattrocento italien*, FMSH-WP-2014-68, mai 2014.

Frédéric Landy, *Quelle sécurité alimentaire en Inde ? Dilemmes économiques, socio-politiques et environnementaux. Une mise en miroir francilienne*, FMSH-WP-2014-69, juin 2014.

Hafidha Chekir, *Le combat pour les droits des femmes dans le monde arabe*, FMSH-WP-2014-70, juin 2014.

Géraldine Thiry, Philippe Roman, *The Inclusive Wealth Index. A Sustainability Indicator, Really?*, FMSH-WP-2014-71, juin 2014.

Michael Cronin, *Représenter l'exil: le sujet du non-exil*, FMSH-WP-2014-72, juin 2014.

Marc Goldschmit, *L'écriture de l'exil et l'hypothèse du Marrane (Kafka, Benjamin, Derrida et au-delà)*, FMSH-WP-2014-73, juin 2014.

Boris Chukhovich, *Le street art, un genre exilique ?*, FMSH-WP-2014-74, juin 2014.

Palanigounder Duraisamy, *Who Wins in the Indian Parliament Election? Criminals, Wealthy or Incumbents*, FMSH-WP-2014-75, août 2014.

Denis Kondakov, *Francophonie en Biélorussie aux XVIII^e et XIX^e siècles*, FMSH-WP-2014-76, août 2014.

Isabel Lustosa, *Le séjour de don Pedro 1^{er} à Paris et la presse française (1831/1832)*, FMSH-WP-2014-77, août 2014.

Lucas Chancel, Géraldine Thiry, Damien Demailly, *Les nouveaux indicateurs de prospérité : pour quoi faire ? Enseignements de six expériences nationales*, FMSH-WP-2014-78, septembre 2014.

Alex M. Nading, *Local Biologies and the Chemical Infrastructures of Global Health*, FMSH-WP-2014-79, septembre 2014.

Maria Conterno, *"Storytelling" and "History writing" in Seventh-Century Near East*, FMSH-WP-2014-80, septembre 2014.

Jean-Luc Racine, *Penser l'Inde émergente : de l'altérité orientaliste au post-postcolonialisme*, FMSH-WP-2014-81, septembre 2014.

Brinda J. Mehta, *Fractures historiques, trauma et résistance dans l'écriture féministe algérienne : Maïssa Bey, Assia Djebar et Leïla Sebbar*, FMSH-WP-2014-82, novembre 2014.

Sadia Chérif, *Construire la résilience au changement climatique par les connaissances locales : le cas des régions montagneuses et des savanes de Côte d'Ivoire*, FMSH-WP-2014-83, novembre 2014.

Géraldine Thiry, Léa Sébastien, Tom Bauler, *Ce que révèle le discours*

des acteurs officiels sur un « au-delà du PIB », FMSH-WP-2014-84, novembre 2014.

Sophie Roche, *The faithful assistant. Muhiddin Faizulloev's life and work in the light of Soviet ethnography*, FMSH-WP-2014-85, novembre 2014.

Mala Singh, *Re-thinking Knowledge and Social Change in South Africa*, FMSH-WP-2014-86, novembre 2014.

Georges Corm, Christiane Veauvy, *Proche-Orient et conscience historique, entretien*, FMSH-WP-2015-87, janvier 2015.

Dominique Boullier, *Les sciences sociales face aux traces du big data ? Société, opinion et répliques*, FMSH-WP-2015-88, février 2015.

Christian Walter, *Les deux quantifications de la théorie financière. Contribution à une histoire critique des modèles financiers*, FMSH-WP-2015-89, février 2015.

Position Papers : la liste

Jean-François Sabouret, *Mars 2012 : Un an après Fukushima, le Japon entre catastrophes et résilience*, FMSH-PP-2012-01, mars 2012.

Ajay K. Mehra, *Public Security and the Indian State*, FMSH-PP-2012-02, mars 2012.

Timm Beichelt, *La nouvelle politique européenne de l'Allemagne : L'émergence de modèles de légitimité en concurrence ?*, FMSH-PP-2012-03, mars 2012.

Antonio Sérgio Alfredo Guimarães, *Race, colour, and skin colour in Brazil*, FMSH-PP-2012-04, juillet 2012.

Mitchell Cohen, *Verdi, Wagner, and Politics in Opera. Bicentennial Ruminations*, FMSH-PP-2012-05, mai 2013.

Ingrid Brena, *Les soins médicaux portés aux patients âgés incapables de s'autogérer*, FMSH-PP-2013-06, avril 2013.

Thalia Magioglou, *Refaire l'Europe ou refaire le « monde » ? Un commentaire sur l'ouvrage : « Refaire l'Europe avec Jürgen Habermas »*, FMSH-PP-2013-07, septembre 2013.

Samadia Sadouni, *Cosmopolitisme et prédication islamique transfrontalière : le cas de Maulana Abdul Aleem Siddiqui*, FMSH-PP-2013-08, septembre 2013.

Alexis Nuselovici (Nouss), *Étudier l'exil*, FMSH-PP-2013-09, septembre 2013.

Retrouvez tous les working papers et les position papers sur notre site, sur hypotheses.org et sur les archives ouvertes halshs

<http://www.fmsch.fr/fr/ressources/working-papers>

<http://halshs.archives-ouvertes.fr/FMSH-WP>

<http://wpfmsch.hypotheses.org>